Última actualización: 2 de agosto de 2021

Clase 26

La sesión anterior enunciamos y demostramos el siguiente teorema:

Corolario 1 (Teorema del Valor Intermedio) *Sean $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $d, e \in [a, b]$, con $d < e$. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f toma cualquier valor entre $f(d)$ y $f(e)$.*

En esta sesión continuaremos estudiando las consecuencias de la continuidad de una función en un intervalo cerrado.

Una función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor máximo y su valor mínimo

Teorema 2 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es acotada superiormente en $[a, b]$.*

Demostración. Consideremos el conjunto

$$A = \{x \in [a, b] \mid f \text{ es acotada superiormente en } [a, x]\}.$$

Note que $A \neq \varnothing$, pues $a \in A$, además, como $A \subseteq [a, b]$, se tiene que A es acotado superiormente. Sea $\alpha = \sup A$. Dado que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, existe $\delta > 0$ tal que $[a, a + \delta) \subseteq [a, b]$ y f es acotada superiormente en $[a, a + \delta)$. Así, si consideramos $x \in (a, a + \delta)$, se tiene que $x \in A$ y por lo tanto $a < x \leq \alpha$. Lo anterior muestra que $a < \alpha$.

Veamos que $\alpha = b$, para ello supondremos que no es así, es decir, supondremos que $a < \alpha < b$. Como f es continua en α, existe $\delta > 0$ tal que $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subseteq [a, b]$ y f es acotada superiormente en $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. Ahora, por ser $\alpha = \sup A$, se tiene que existe $x_0 \in A$ tal que $\alpha - \delta < x_0 < \alpha$. Se sique que f es acotada en $[a, x_0]$. Por otro lado, si $x_1 \in (\alpha, \alpha + \delta)$, entonces f es acotada en $[x_0, x_1]$, de donde f es acotada en $[a, x_1]$. Por lo que $x_1 \in A$, pero note que esto es una contradicción pues $\alpha < x_1$. Por lo tanto $\alpha = b$.

Hasta ahora sabemos que f es acotada superiormente en $[a, x]$ para toda $x < b$, falta ver que f es acotada superiormente en $[a, b]$. Como $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$, existe $\delta > 0$ tal que $(b - \delta, b] \subseteq [a, b]$ y f es acotada en $(b - \delta, b]$. Luego, si consideramos $x' \in (b - \delta, b]$, se tiene que f es acotada superiormente en $[a, x']$ y acotada superiormente en $[x', b]$, de donde f es acotada superiormente en $[a, b]$. ■

Corolario 3 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es acotada inferiormente en $[a, b]$.*

Demostración. Consideremos la función $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = -f(x)$. Como f es continua en $[a, b]$, se tiene que g es continua en $[a, b]$. Luego, por el teorema anterior, g es acotada superiormente, es decir, existe $N \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \leq N$ para todo $x \in [a, b]$. Se sigue que

$$f(x) \geq -N,$$

para todo $x \in [a, b]$, es decir, f es acotada inferiormente. ■

Corolario 4 (Una función continua en un intervalo cerrado es acotada) *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es acotada en $[a, b]$.*

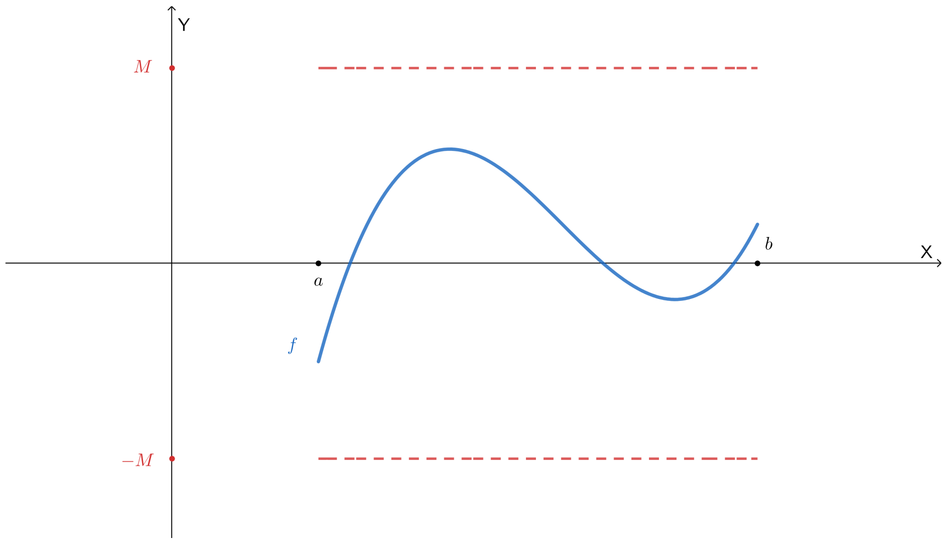

Figura 1: Una función f continua en $[a, b]$ es acotada en dicho intervalo, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M$.

Demostración. Por el Teorema 2 y el Corolario 3, existen $m, N \in \mathbb{R}$, respectivamente, tales que $m \leq f(x) \leq N$, para toda $x \in [a, b]$. Ahora, si $M = \text{máx}\{|m|, |N|\}$, entonces

$$|f(x)| \leq M,$$

para toda $x \in [a, b]$. ■

Teorema 5 (Una función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor máximo) *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe $y \in [a, b]$ tal que $f(x) \leq f(y)$, para todo $x \in [a, b]$.*

Demostración. Por el Corolario 4, el conjunto

$$A = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

es acotado, además es no vacío. Sea $\alpha = \sup A$. Se tiene que $f(x) \leq \alpha$ para todo $x \in [a, b]$. Mostraremos que existe $y \in [a, b]$ tal que $f(y) = \alpha$. Supongamos que esto no ocurre, es decir, supongamos que $\alpha \neq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. De esta manera, la función $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{1}{\alpha - f(x)},$$

está bien definida, más aún, g es continua en $[a, b]$. Ahora, por ser α el supremo del conjunto A, para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in [a, b]$ tal que $\alpha - \varepsilon < f(x_\varepsilon) < \alpha$. Se sigue que para cada $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in [a, b]$ tal que

$$g(x_\varepsilon) = \frac{1}{\alpha - f(x_\varepsilon)} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Lo anterior muestra que g no es acotada en $[a, b]$, lo que contradice el Corolario 4. Por lo tanto, existe $y \in [a, b]$ tal que $\alpha = f(y)$. Luego,

$$f(x) \leq f(y),$$

para todo $x \in [a, b]$. ■

Corolario 6 (Una función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor mínimo) *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función. Si* f *es continua en* $[a, b]$, *entonces existe* $y \in [a, b]$ *tal que* $f(y) \leq f(x)$, *para todo* $x \in [a, b]$.

Demostración. Consideremos la función $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = -f(x)$. Como f es continua en $[a, b]$, se tiene que g es continua en $[a, b]$. Luego, por el teorema anterior, existe $y \in [a, b]$ tal que $g(x) \leq g(y)$ para todo $x \in [a, b]$. Se sigue que

$$f(y) \leq f(x),$$

para todo $x \in [a, b]$. ■

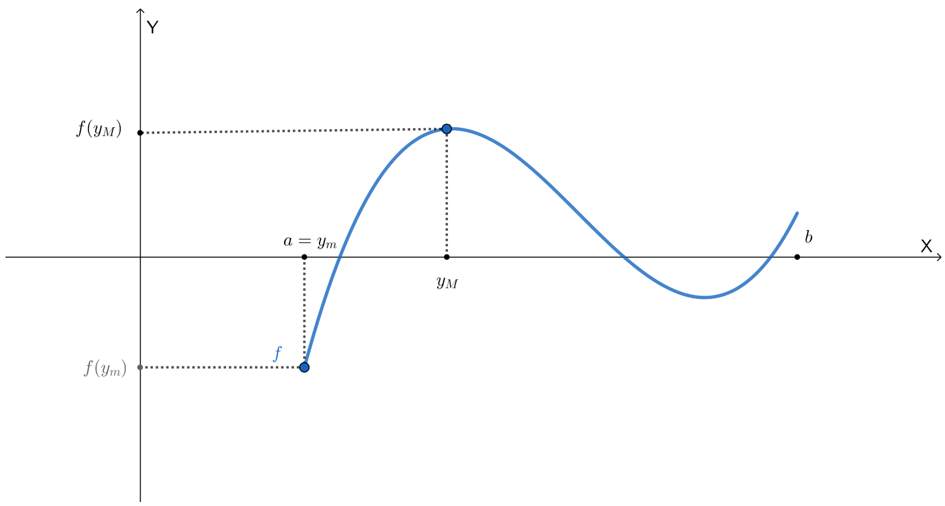

Figura 2: Una función f continua en $[a, b]$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo, es decir, existen $y_m, y_M \in [a, b]$ tales que $f(y_m) \leq f(x) \leq f(y_M)$, para todo $x \in [a, b]$.