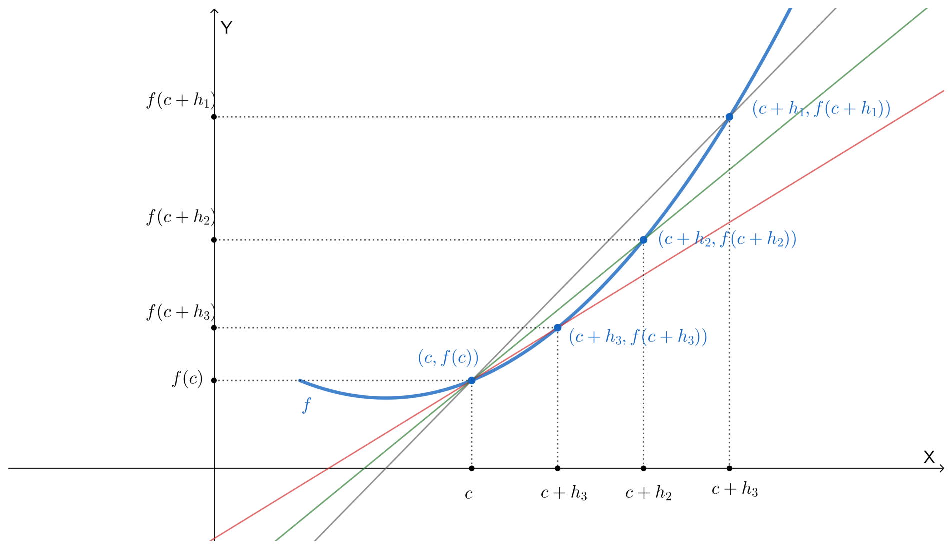
Última actualización: 4 de agosto de 2021

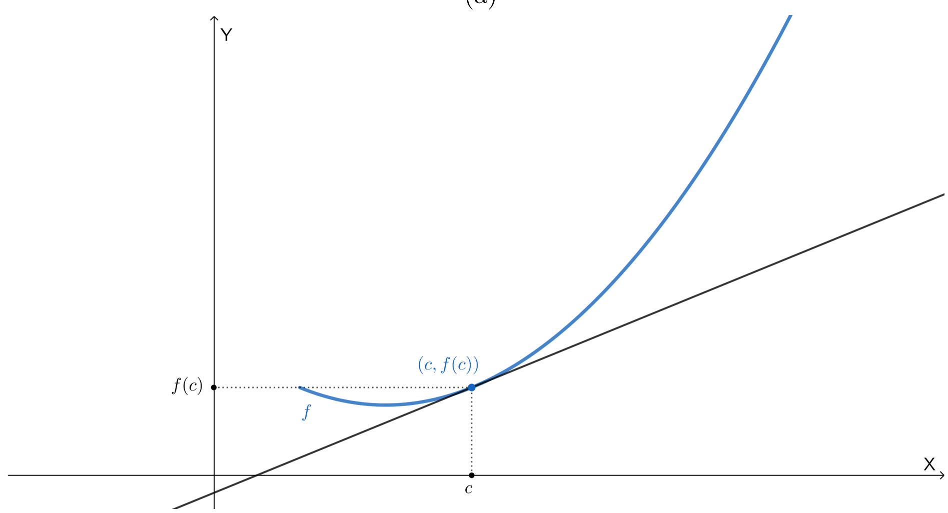
Clase 27

Dada una "curva" $\mathscr{C}$ en el plano y un punto P en ella ¿qué es una recta tangente a $\mathscr{C}$ en el punto P?

La Derivada



(a)



(b)

Figura 1: Una recta determinada por el punto $(c, f(c))$ y otro punto de la forma $(c+h, f(c+h))$ (figura 1a) es "parecida" a la recta tangente (figura 1b) , mientras más "cerca" esté $c+h$ de c el "parecido" es mayor.

Para poder responder esta pregunta debemos limitarnos a los conceptos que sí tenemos definidos, pues nunca hemos hablado de "curvas" en el plano. Lo más parecido a esto y que sí hemos definido es el concepto de gráfica de una función y su representación en el plano. Supongamos entonces que tenemos una función $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y un punto $c \in (a, b)$. Ahora nuestra pregunta es: ¿qué o cuál es la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$?

Recordemos algunas cosas que aprendimos en nuestros cursos básicos de Geometría, por ejemplo, que *una recta tangente a una circunferencia es una recta que solo toca un punto de la circunferencia* o que *para obtener la ecuación de una recta es necesario conocer dos puntos de la recta o solo uno pero también la pendiente de la recta*. Así, en nuestro caso, solo conocemos un punto, el punto por donde queremos que "pase" la recta "tangente", así que parece que esto no es suficiente.

Pero notemos lo siguiente: Si consideramos un punto "cercano" a c, digamos $c + h_1$, y consideramos el punto de la gráfica que le corresponde, entonces la recta determinada por los puntos $(c, f(c))$ y $(c+h_1, f(c+h_1))$ es "parecida" a la recta que nos interesa. Ahora bien, si consideramos otro punto "más cercano" a c, digamos $c + h_2$ y repetimos este procedimiento, tenemos que la recta determinada por los puntos $(c, f(c))$ y $(c + h_2, f(c + h_2)$ "se parece más" a la recta que nos interesa, vea figura 1. En fin, podríamos continuar este procedimiento con la cantidad de puntos que deseemos, pero a estas alturas ya conocemos una forma más elegante y formal de lo que es "acercarnos a un punto", el concepto de LÍMITE. De esta manera, si existe una recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$ esta debería tener como pendiente el número

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Definición 1 *Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in (a, b)$. Diremos que f es derivable en c si existe*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

En este caso, llamaremos al límite anterior ***la derivada de f en*** *c y lo denotaremos por $f'(c)$, es decir,*

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Si f es derivable en cada $c \in (a, b)$, diremos que f es derivable en (a, b).

Definición 2 *Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in (a, b)$. Si f es derivable en c, llamaremos a la recta que tiene como ecuación*

$$y = f(c) + f'(c)(x - c),$$

la recta tangente a la gráfica de f en el punto *$(c, f(c))$.*

Teorema 3 *Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in (a, b)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f es derivable en c.

(2) Existe $\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$.

(3) Existe $g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en c tal que

$$f(x) = f(c) + (x - c)g(x), \tag{1}$$

para todo $x \in (a, b)$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |h| < \delta$ y $c+h \in (a,b)$, entonces

$$\left|\frac{f(c+h) - f(c)|}{h} - f'(c)\right| < \varepsilon.$$

Ahora, si $x \in (a,b)$ y cumple que $0 < |x-c| < \delta$, entonces

$$\left|\frac{f\left(c + (x-c)\right) - f(c)}{x-c} - f'(c)\right| < \varepsilon.$$

Es decir,

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c} = f'(c).$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea $g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(c)}{x-c} & \text{si } x \neq c \\ f'(c) & \text{si } x = c. \end{cases}$$

Note que

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c} = f'(c) = g(c),$$

es decir, g es continua en c. Además, por construcción, g satisface (1) para todo $x \in (a,b)$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Por hipótesis, tenemos que

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c} = \lim_{x \to c} g(x) = g(c).$$

Así, de manera similar que en la demostración de (1) implica (2), se tiene que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = g(c),$$

es decir, f es derivable en c y $f'(c) = g(c)$. ∎

Ejemplo 4 *Sean $k \in \mathbb{R}$ fijo y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = k$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Muestre que f es derivable en cada $c \in \mathbb{R}$*

Solución. Sea $c \in \mathbb{R}$. Note que

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c} = \lim_{x \to c} \frac{0}{x-c} = 0.$$

Así, f es derivable en cada $c \in \mathbb{R}$ y $f'(c) = 0$. ∎

Ejemplo 5 *Sean $m, b \in \mathbb{R}$ fijos y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = mx + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Muestre que f es derivable en cada $c \in \mathbb{R}$*

Solución. Sea $c \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{x \to c} \frac{\left[m\left(c+h\right) + b\right] - \left[mc + b\right]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{mh}{h} = m.$$

Así, f es derivable en cada $c \in \mathbb{R}$ y $f'(c) = m$. Note además que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$ está dada por la ecuación

$$\begin{aligned} y &= f(c) + f'(c)(x - c) \\ &= mc + b + m(x - c) \\ & mx + b. \end{aligned}$$

Es decir, la recta tangente coincide con la gráfica de la función f (vaya sorpresa ¿no?). ■

Ejemplo 6 *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Muestre que f es derivable en cada $c \in \mathbb{R}$*

Solución. Sea $c \in \mathbb{R}$. Consideremos la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - c^2}{x - c} & \text{si } x \neq c \\ 2c & \text{si } x = c. \end{cases}$$

g es continua en c, pues

$$\lim_{x \to c} \frac{x^2 - c^2}{x - c} = 2c.$$

Ahora, si $x \neq c$, entonces

$$f(c) + g(x)(x - c) = c^2 + \frac{x^2 - c^2}{x - c}(x - c) = x^2 = f(x)$$

y si $x = c$, entonces

$$f(c) + g(x)(x - c) = f(c) + g(c)(c - c) = f(c).$$

Así, g satisface (1). Por lo tanto g es derivable y $f'(c) = g(c) = 2c$. ■

Como pudimos observar en el ejemplo anterior, usar el inciso (3) del Teorema 3 puede no ser lo más práctico para demostrar que una función es derivable en c si se conoce su regla de correspondencia, pero este inciso no es para nada un desperdicio de tiempo, la próxima sesión podremos ver su "fuerza".

Para continuar veamos un ejemplo de una función que no es derivable en un punto c.

Ejemplo 7 *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Muestre que f NO es derivable en $c = 0$.*

Solución. Debemos demostrar que NO existe $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(0 + h) - f(0)}{h}$, es decir, que NO existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Por un lado, tenemos que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

y por otro lado,

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Por lo tanto f NO es derivable en $c = 0$. ■

Teorema 8 *Sean $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in (a,b)$. Si f es derivable en c, entonces f es continua en c.*

Demostración. Debemos demostrar que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$, lo cual ocurre si y sólo si

$$\lim_{x\to c} \left(f(x) - f(c)\right) = 0.$$

Ahora, como f es derivable en c, se tiene que

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c).$$

Así,

$$\begin{aligned}
0 = f'(c) \cdot 0 &= \left(\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right) \cdot \left(\lim_{x\to c}(x - c)\right) \\
&= \lim_{x\to c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c)\right) \\
&= \lim_{x\to c} \left(f(x) - f(c)\right).
\end{aligned}$$

Concluimos que f es continua en c. ∎

¿Vale el regreso? es decir, si f es continua en c, entonces ¿f es derivable en c? La respuesta es NO, basta considerar el Ejemplo 7.