Clase 28

La sesión anterior introducimos la definición de derivada de una función en un punto:

Definición 1 *Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in (a, b)$. Diremos que f es derivable en c si existe $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$. En este caso, llamaremos al límite anterior* ***la derivada de f en*** *c y lo denotaremos por $f'(c)$, es decir, $f'(c) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$. Si f es derivable en cada $c \in (a, b)$, diremos que f es derivable en (a, b).*

También trabajamos en un par de afirmaciones equivalentes a nuestra definición de derivada de una función en un punto:

Teorema 2 *Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in (a, b)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f es derivable en c.

(2) Existe $\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$.

(3) Existe $g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en c tal que $f(x) = f(c) + (x - c)g(x)$, para todo $x \in (a, b)$.

Y vimos como la derivabilidad implica la continuidad, pero no al revés.

Teorema 3 *Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in (a, b)$. Si f es derivable en c, entonces f es continua en c.*

En esta ocasión estudiaremos un par de teoremas que nos permitirán, a partir de algunas funciones derivables en un mismo punto, obtener otras funciones también derivables.

Aritmética de Derivadas y Regla de la Cadena

Teorema 4 *Sean $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones y $c \in (a, b)$. Si f y g son derivables en c, entonces:*

(1) $f + g$ es derivable en c y $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.

(2) kf es derivable en c y $(kf)'(c) = kf'(c)$, donde k es un número real fijo.

(3) fg es derivable en c y $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$.

(4) Si $g(c) \neq 0$, entonces $1/g$ es derivable en c y $\displaystyle\left(\frac{1}{g}\right)'(c) = \frac{-g'(c)}{(g(c))^2}$.

(5) Si $g(c) \neq 0$, entonces f/g es derivable en c y $\displaystyle\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}$.

Demostración. Como la demostración de cada inciso consiste en verificar la existencia de un límite solo haremos la prueba de un par de incisos.

(1) Como f y g son derivables en c, entonces

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \qquad \text{y} \qquad g'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{g(c+h)-g(c)}{h}.$$

Así,

$$\begin{aligned} f'(c)+g'(c) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(c+h)-g(c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(c+h)-f(c)}{h} + \frac{g(c+h)-g(c)}{h} \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)+g(c+h)-(f(c)+g(c))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(c+h)-(f+g)(c)}{h}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(f+g)(c+h)-(f+g)(c)}{h} = f'(c)+g'(c)$, es decir, $f+g$ es derivable en c y $(f+g)'(c) = f'(c)+g'(c)$.

(3) Por el Teorema 3, tenemos que g es continua en c, así que $\lim\limits_{h\to 0} g(c+h) = g(c)$. Luego,

$$\begin{aligned} f'(c)g(c)+f(c)g'(c) &= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \right) \left(\lim_{h\to 0} g(c+h) \right) + (f(c)) \left(\lim_{h\to 0} \frac{g(c+h)-g(c)}{h} \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(c+h)-f(c)}{h} g(c+h) \right) + \lim_{h\to 0} \left(f(c) \frac{g(c+h)-g(c)}{h} \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(c+h)g(c+h)-f(c)g(c+h)+f(c)g(c+h)-f(c)g(c)}{h} \right) \\ &= \lim_{h\to} \frac{f(c+h)g(c+h)-f(c)g(c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(c+h)-(fg)(c)}{h}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(fg)(c+h)-(fg)(c)}{h} = f'(c)g(c)+f(c)g'(c)$, esto es, fg es derivable en c y $(fg)'(c) = f'(c)g(c)+f(c)g'(c)$.

(5) Note que $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$, así que, por los incisos (3) y (4), la función $\dfrac{f}{g}$ es derivable en c y

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(c) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(c) \\ &= f'(c)\left(\frac{1}{g}\right)(c) + f(c)\left(\frac{1}{g}\right)'(c) \\ &= \frac{f'(c)}{g(c)} + f(c)\left(\frac{-g'(c)}{(g(c))^2}\right) \\ &= \frac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{(g(c))^2}. \end{aligned}$$

Les sugerimos fuertemente que realicen las demostraciones de los incisos restantes. ■

Ejemplo 5 *Demuestre, para cada $n \in \mathbb{N}$, que la función $f(x) = x^n$, es derivable en cada $c \in \mathbb{R}$ y que $f'(c) = nc^{n-1}$.*

Solución. En el Ejemplo 5 de la Clase 27 (con $m = 1$ y $b = 0$) vimos que la función $h_1(x) = x$ es derivable en cada $c \in \mathbb{R}$ y que $h_1'(c) = 1$. Ahora, si $h_2(x) = x^2$, tenemos que $h_2 = h_1 \cdot h_1$, luego, por el inciso (3) del teorema anterior, h_2 es derivable en cada $c \in \mathbb{R}$ y

$$h_2'(c) = (h_1 \cdot h_1)'(c) = h_1'(c) \cdot h_1(c) + h_1(c) \cdot h_1'(c) = 1 \cdot c + c \cdot 1 = 2c,$$

es decir, $h_2'(c) = 2c$.

Supongamos ahora, para $n \in \mathbb{N}$ fijo, que la función $h_n(x) = x^n$ es derivable en cada $c \in \mathbb{R}$ y que $h_n'(c) = nc^{n-1}$.

Consideremos ahora la función $h_{n+1}(x) = x^{n+1}$. Note que $h_{n+1} = h_1 \cdot h_n$. Como h_1 y h_n son derivables en cada $c \in \mathbb{R}$ (base de inducción e hipótesis de inducción respectivamente) se tiene, por el inciso (3) del teorema anterior, que h_{n+1} es derivable en cada $c \in \mathbb{R}$, además

$$h_{n+1}'(c) = h_1'(c) \cdot h_n(c) + h_1(c) \cdot h_n'(c) = 1 \cdot c^n + c \cdot nc^{n-1} = (n+1)c^n.$$

Así, por el principio de inducción matemática, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la función $f(x) = x^n$ es derivable en cada $c \in \mathbb{R}$ y $f'(c) = nc^{n-1}$. ■

Teorema 6 (Regla de la cadena) *Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : (d, e) \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f(a, b) \subseteq (d, e)$. Si f es derivable en c y g es derivable en $f(c)$, entonces $g \circ f$ es derivable en c y*

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c))\, f'(c).$$

Demostración. Usando el inciso (3) del Teorema 2, tenemos que existen funciones $h : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $j : (d, e) \longrightarrow \mathbb{R}$, continuas en c y en $f(c)$ respectivamente, tales que

$$f(x) = f(c) + h(x)(x - c), \tag{1}$$

para cada $x \in (a, b)$, y

$$g(y) = g(f(c)) + j(y)(y - f(c)), \tag{2}$$

para cada $y \in (c, d)$. Se sigue, de (1) y (2), que

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= g(f(c)) + j(f(x))(f(x) - f(y)) \\
&= (g \circ f)(c) + j(f(x))(h(c)(x - c)) \\
&= (g \circ f)(c) + (j \circ f)(x) h(c)(x - c),
\end{aligned}$$

para cada $x \in (a, b)$.

Así, si consideramos la función $(j \circ f)\, h(c) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, se tiene que $(j \circ f)\, h(c)$ es continua en c, pues f es continua en c, j lo es en $f(c)$ y $h(c)$ es una constante, además

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(c) + (j \circ f)(x) h(c)(x - c).$$

Por lo tanto $g \circ f$ es derivable en c, más aún (como vimos en la demostración del Teorema 2), se tiene que

$$(g \circ f)'(c) = (j \circ f)(c) h(c) = j(f(c))\, h(c) = g'(f(c))\, f'(c),$$

con lo que concluimos nuestra demostración. ■

Ejemplo 7 *Sean $m, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ fijos y $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $h(x) = (mx + b)^n$. Muestre que h es derivable en cada $c \in \mathbb{R}$ y que*

$$h'(c) = nm\,(mc + b)^{n-1}\,.$$

Solución. Consideremos las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = mx + b$ y $g(x) = x^n$. Note que $h = g \circ f$ y como f y g son derivables en cada $c \in \mathbb{R}$, por el Teorema 6, h es derivable en cada $c \in \mathbb{R}$, más aún,

$$h'(c) = (g \circ f)'\,(c) = g'\,(f(c))\,f'(c) = \left(n(mc + b)^{n-1}\right) m = nm(mc + b)^{n-1}.$$

$\blacksquare$