Última actualización: 12 de agosto de 2021

Clase 30

La sesión anterior definimos los puntos máximos y mínimos de una función en un subconjunto de su dominio:

Definición 1 *Sean f una función, $A \subseteq Dom(f)$ y $y \in A$. Diremos que y es* ***un punto máximo (mínimo) de f en** A si*

$$f(x) \leq f(y) \quad (f(y) \leq f(x)),$$

para todo $x \in A$. Al número $f(y)$ se le llama ***valor máximo (mínimo) de f en** A.*

Y a partir de estos definimos los puntos máximos y mínimos locales de una función en un sunconjunto de su dominio:

Definición 2 *Sean f una función, $A \subseteq Dom(f)$ y $y \in A$. Diremos que y* ***es un punto máximo (mínimo) local de f en** A si existe algún $\delta > 0$ tal que y es un punto máximo (mínimo) de f en $A \cap (y - \delta, y + \delta)$.*

También obtuvimos un par de resultados que relacionan la derivada con los puntos máximos y mínimos locales:

Teorema 3 *Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $y \in (a, b)$. Si y es un punto máximo de f en (a, b) y además f es derivable en y, entonces $f'(y) = 0$.*

Corolario 4 *Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $y \in (a, b)$. Si y es un punto mínimo de f en (a, b) y además f es derivable en y, entonces $f'(y) = 0$.*

Finalmente, definimos los puntos críticos de una función:

Definición 5 *Sea f una función. Un* ***punto crítico de** f es un número y tal que $f'(y) = 0$. En este caso, al número $f(y)$ se le denomina* ***valor crítico de f.***

En esta ocasión mostraremos cómo hallar los valores máximos y mínimos de una función definida en un intervalo cerrado, además enunciaremos y demostraremos dos teoremas importantísimos del Cálculo Diferencial.

Hallando Máximos y Mínimos y Teorema del Valor Medio

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Como ya hemos visto antes, por ser f continua en $[a, b]$, f alcanza su valor máximo y su valor mínimo en $[a, b]$, pero ¿cómo hallar dichos valores? Tenemos tres tipos de puntos en el intervalo $[a, b]$:

(1) Los extremos de $[a, b]$;

(2) Los puntos de (a, b) donde f no es derivable

(3) Los puntos de (a, b) donde f es derivable.

Ahora, note que si y es un punto donde f alcanza su valor máximo o su valor mínimo y este no es del tipo (1) ni del tipo (2), entonces f es derivable en y, así que por el Teorema 3 o el Corolario 4, $f'(y) = 0$. Luego, y es un punto crítico, es decir, los puntos del tipo (3) son los puntos críticos de f. Así, para hallar los puntos donde f alcanza su valor máximo y su valor mínimo, solo basta comparar los valores que f toma en los extremos de $[a, b]$, los valores que f toma en los puntos de (a, b) donde f no es derivable y los valores que f toma en los puntos críticos de (a, b).

Ejemplo 6 *Sea* $f : [1, 7/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ *la función dada por* $f(x) = (x-2)^3 - (x-2) + 1$. *Halle, si existen, el valor máximo y el valor mínimo de* f *en* $[1, 7/2]$.

Solución. Como f es continua en $[1, 7/2]$, entonces f alcanza su valor máximo y su valor mínimo en $[1, 7/2]$. Ahora, hallemos los tres tipos de puntos candidatos a ser los puntos máximos y puntos mínimos de f en $[1, 7/2]$:

(1) Se tiene que $f(1) = 1$ y $f(7/2) = 23/8$.

(2) La función f es derivable en $(1, 7/2)$, por lo que no existen puntos que cumplan la condición (2).

(3) Se tiene que $f'(x) = 3(x-2)^2 - 1$, por lo que $f'(x) = 0$ si y sólo si $x = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ o $x = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Luego,

$$f\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{9 - 2\sqrt{3}}{9} \quad \text{y} \quad f\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{9 + 2\sqrt{3}}{9}.$$

Finalmente, como

$$\frac{9 - 2\sqrt{3}}{9} < 1 < \frac{9 + 2\sqrt{3}}{9} < \frac{23}{8},$$

concluimos que el valor mínimo de f en $[1, 7/2]$ es $\dfrac{9 - 2\sqrt{3}}{9}$ y lo alcanza en $x = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ mientras que el valor máximo de f en $[1, 7/2]$ es $\dfrac{23}{8}$ y lo alcanza en $x = 7/2$, vea figura 1. ∎

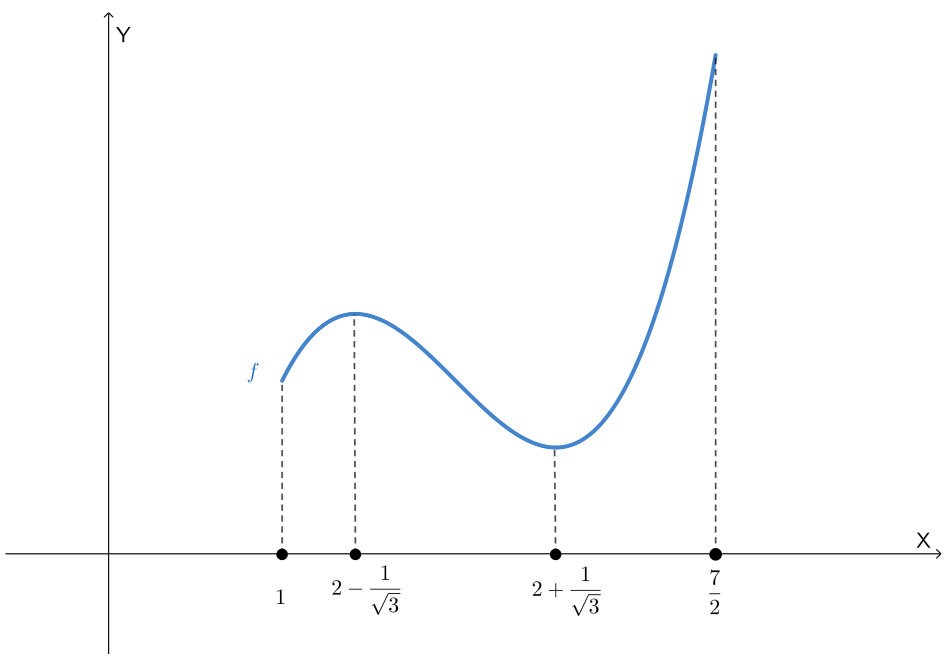

Figura 1: f alcanza su valor mínimo, en $[1, 7/2]$, cuando $x = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ mientras que su valor máximo, en $[1, 7/2]$, lo alcanza cuando $x = 7/2$.

El ejemplo anterior puede hacernos creer que este método es aplicable a cualquier función, pero no es así, la función debe ser "suficentemente buena", por lo menos continua, si no lo creen los reto a aplicar dicho método a la *función palomitas de maíz*.

Aprovechando la gráfica de la figura 1, pensemos lo siguiente: Si consideramos la recta que une los extremos de la gráfica, es decir, la recta que une los puntos $(1, f(1))$ y $(7/2, f(7/2))$, es posible imaginar que de entre todos los puntos de la gráfica de f existe uno de tal manera que la gráfica de la recta tangente a la gráfica de f, por dicho punto, sea paralela a la recta que une los extremos de la gráfica, vea figura 2.

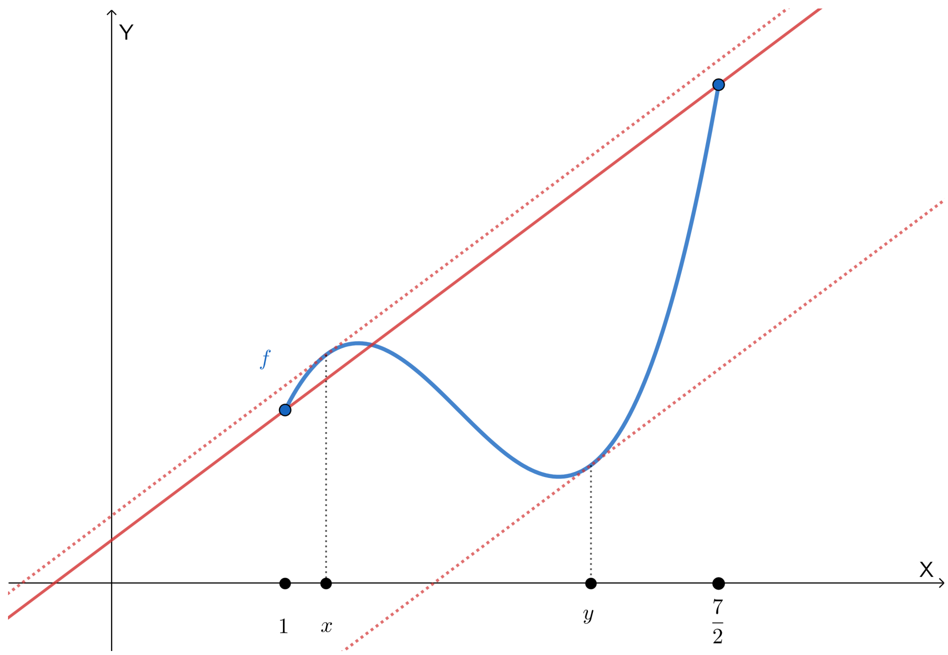

Figura 2: Para cualquier función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ¿existe un punto $x \in [a, b]$ de tal manera que la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(x, f(x))$ sea paralela a la recta que une los extremos de la gráfica?

Lo anterior, bajo ciertas condiciones, es la afirmación del Teorema del Valor Medio, pero antes de enunciar y demostrar dicho teorema, enunciaremos, y demostraremos, una versión particular de este.

Teorema 7 (de Rolle) *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración. Como f es continua en $[a, b]$, f alcanza su valor máximo y su valor mínimo en $[a, b]$. Si f alcanza su valor máximo o mínimo en $c \in (a, b)$, entonces, por hipótesis y por el Teorema 3 o por el Corolario 4, $f'(c) = 0$, en cuyo caso terminamos.

Supongamos entonces que f alcanza su valor máximo y su valor mínimo en a y en b (o en b y en a). Como $f(a) = f(b)$, se sigue que $f(x) = f(a) = f(b)$ para toda $x \in (a, b)$, en cuyo caso, cualquier $c \in (a, b)$ cumple que $f'(c) = 0$. ■

Una pregunta natural es por qué demostrar un caso particular en vez de demostrar la versión general y luego obtener la versión particular como una consecuencia. Pues resulta que este caso particular nos ayudará a demostrar el caso general, es decir, el Teorema de Rolle y el Teorema del Valor Medio son equivalentes.

Corolario 8 (Teorema del Valor Medio) *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración. Sea $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a).$$

Note que g es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), además $g(a) = f(a)$ y $g(b) = f(a)$, es decir, $g(a) = g(b)$. Así, por el Teorema 7, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, esto es

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

Ejemplo 9 *Demuestre que existe un único $x \in [0, 1]$ que satisface la ecuación*

$$x^3 - 3x + \sqrt{2} = 0.$$

Solución. Antes de comenzar con la demostración, es pertinente comentar que debemos demostrar dos cosas, primero que existe una solución en $[0, 1]$ y luego que esta es única.

Consideremos la función $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 3x + \sqrt{2}$. Note que f es continua en $[0, 1]$ y derivable en $(0, 1)$. Luego, $f(0) = \sqrt{2} > 0$ y $f(1) = \sqrt{2} - 2 < 0$. Así, por el Teorema del Valor Intemedio, existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

Supongamos ahora que $c_1, c_2 \in (0, 1)$ son tales que $f(c_1) = f(c_2) = 0$. Si $c_1 \neq c_2$, digamos $c_1 < c_2$, entonces f es continua en $[c_1, c_2]$ y derivable en (c_1, c_2), así que, por el Teorema del Valor Medio (o el Teorema de Rolle (el que gusten)) existe $\xi \in (c_1, c_2)$ tal que $f'(\xi) = 0$. Por otro lado, $f'(x) = 3x^2 - 3$, por lo que $f'(x) = 0$ si y sólo si $x = 1$ o $x = -1$. Por lo tanto, $\xi \in \{-1, 1\}$, lo que contradice el hecho de que $\xi \in (0, 1)$. Concluimos que, existe un único $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = 0$. ■