Última actualización: 7 de septiembre de 2021

Clase 32

La sesión pasada enunciamos y demostramos, entre otras cosas, un corolario que nos proporciona información de una función a partir del signo que tiene su derivada:

Corolario 1 *Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en (a, b). Si $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) para toda $x \in (a, b)$, entonces f es creciente (decreciente) en (a, b).*

En esta ocasión enunciaremos y demostraremos un críterio que nos permite hallar puntos mínimos/máximos locales de una función a partir del signo que toma la segunda derivada de la función (cuando existe) en los puntos criticos de la misma.

Criterio de las *caritas*

Iniciamos esta sesión con el siguiente corolario.

Corolario 2 *Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en (a, b) y $c \in (a, b)$. Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, c)$ y $f'(x) < 0$ para toda $x \in (c, b)$, entonces c es un punto máximo de f en (a, b).*

Demostración.

Como $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, c)$ y $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c, b)$, por el Corolario 1, se tiene que f es creciente en (a, c) y decreciente en (c, b). Luego, por la continuidad de f en c, se tiene que $f(x) \leq f(c)$ para toda $x \in (a, c)$ y $f(c) \geq f(x)$ para toda $x \in (c, b)$, es decir, c es un punto máximo de f en (a, b). ■

Este corolario tiene su versión *simétrica* y cuya demostración es inmediata.

Corolario 3 *Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en (a, b) y $c \in (a, b)$. Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, c)$ y $f'(x) > 0$ para toda $x \in (c, b)$, entonces c es un punto mínimo de f en (a, b).*

Teorema 4 (Criterio de las caritas) *Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en (a, b) y $c \in (a, b)$ un punto crítico de f. Si f es dos veces derivable en c y:*

(1) $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c.

(2) $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c.

Demostración. Se tiene que

$$f''(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h)}{h},$$

pues $f'(c) = 0$ por ser c un punto crítico de f.
Mostraremos solo el inciso (1), pues el inciso (2) es totalmente análogo. Supongamos entonces que $f''(c) > 0$. Así, existe $\delta > 0$ de tal manera que para cualquier $0 < |h| < \delta$ se tiene que $c + h \in (a, b)$ y

$$\frac{f'(c+h)}{h} > 0.$$

Ahora, note que si $0 < h < \delta$, entonces $f'(c + h) > 0$, esto es, $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c, c + \delta)$. Por otro lado, si $-\delta < h < 0$, entonces $f'(c + h) < 0$, de donde, $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c - \delta, c)$. Así, por el Corolario 3, c es un punto mínimo de f en $(c - \delta, c + \delta)$, es decir, c es un punto mínimo local de f. ■

Una manera de recordar este criterio es por medio de la figura 1

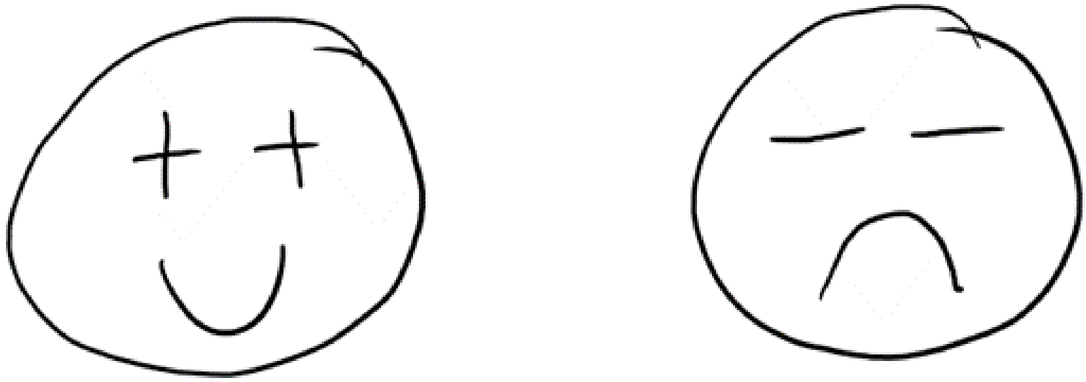

Figura 1: Si la segunda derivada es positiva (los ojitos $+ +$) entonces se trata de un mínimo local (el punto más bajo de la sonrisa) y si la segunda derivada es negativa (los ojitos $- -$) entonces se trata de un máximo local (el punto más alto de la sonrisa).

Pongamos en práctica el criterio anterior.

Ejemplo 5 *Halle los máximos y mínimos locales de la función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = (x-2)^3 - (x-2) + 1.$$

Solución. Se tiene que $f'(x) = 3(x-2)^2 - 1$, por lo que f' es una función derivable en todo $\mathbb{R}$, además $f'(x) = 0$ si y sólo si $x = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ o $x = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Ahora, $f''(x) = 6(x-2)$, por lo que

$$f''\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0 \quad \text{y} \quad f''\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-6}{\sqrt{3}} < 0.$$

Así, por el criterio de las *caritas*, f tiene un punto mínimo local en $x = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y un punto máximo local en $x = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Note que esto corresponde con lo que ya sabíamos acerca de esta función (vea Ejemplo 8 de la Clase 31). ■