Última actualización: 8 de septiembre de 2021

Clase 33

Para esta sesión es necesario recordar el Teorema de Rolle:

Teorema 1 (de Rolle) *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

En esta sesión obtendremos una generalización del Teorema del Valor Medio y luego usaremos esta para demostrar la *Regla de L'Hôpital*.

Teorema del Valor Medio de Cauchy y la Regla de L'Hôpital

Teorema 2 (Teorema del Valor Medio de Cauchy) *Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Si f y g son continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c).$$

Si adicionalmente $g(a)g(b)g'(c) \neq 0$, entonces podemos reescribir la igualdad anterior como sigue

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demostración. Consideremos la función $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = f(x)\,(g(b) - g(a)) - g(x)\,(f(b) - f(a))\,.$$

Note que h es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), pues f y g lo son, además

$$h(a) = f(a)\,(g(b) - g(a)) - g(a)\,(f(b) - f(a)) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$$

y

$$h(b) = f(b)\,(g(b) - g(a)) - g(b)\,(f(b) - f(a)) = f(a)g(b) - f(b)g(a),$$

es decir, $h(a) = h(b)$. Observe que estamos en las condiciones de aplicar el Teorema de Rolle, así que existe $c \in (a,b)$ de tal manera que $h'(c) = 0$, pero

$$h'(c) = f'(c)\,(g(b) - g(a)) - g'(c)\,(f(b) - f(a))\,.$$

De donde se sigue el resultado. ■

Note que, si en particular consideramos $g(x) = x$, obtenemos, una vez más, el Teorema del Valor Medio.

Corolario 3 (Teorema del Valor Medio) *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema 4 (Regla de L'Hôpital) *Sean $c \in (a,b)$, $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables en (a,b), quizas excepto en c, tales que $g'(x) \neq 0$, para todo $x \neq c$, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ y que existe*

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entonces, existe $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, más aún,

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demostración. Supongamos que $f(c) = g(c) = 0$, (como ya hemos visto antes, en los límites nos interesa qué ocurre cerca del punto no exactamente qué ocurre en el punto), así, f y g son continuas en c.

Sea $x \in (a,c)$. Note que $g(x) \neq 0$, pues en caso contrario, es decir, si $g(x) = 0$, entonces $g(x) = g(c)$, luego, por el Teorema de Rolle, existe $\xi \in (x,c)$ tal que $g'(\xi) = 0$, lo que contradice el hecho de que g' no se anula en (a,b). Ahora, aplicando el Teorema del valor Medio de Cauchy a f y g en el intervalo $[x,c]$ se tiene que existe $\alpha_x \in (x,c)$ de tal manera que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}.$$

Pero, observe que si x tiende a c, entonces α_x tiende a c, pues $\alpha_x \in (x,c)$. De aquí que

$$\lim_{x\to c^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c^-} \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \lim_{y\to c^-} \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

De manera análoga se demuestra que

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to c^+} \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

Finalmente, como $\lim\limits_{y\to c} \dfrac{f'(y)}{g'(y)}$ existe, se sigue que $\lim\limits_{y\to c^-} \dfrac{f'(y)}{g'(y)} = \lim\limits_{y\to c^+} \dfrac{f'(y)}{g'(y)}$ y de aquí que $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe y además

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Con lo que concluimos nuestra demostración. ■

Corolario 5 *Sea $h : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en (a,b). Si h es derivable en (a,b), quizas excepto en c, y $\lim\limits_{x\to c} h'(x)$ existe, entonces h es derivable en c y*

$$h'(c) = \lim_{x\to c} h'(x).$$

Demostración. Consideremos las funciones $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = h(x) - h(c)$ y $g(x) = x - c$. Note que, tanto f como g satisfacen las hipótesis del Teorema 4, por lo que existe $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Pero $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c}\dfrac{h(x)-h(c)}{x-c}$ mientras que $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to c}\dfrac{h'(x)}{1}$. Así, h es derivable en c y

$$h'(c) = \lim_{x\to c} h'(x).$$

■

Por supuesto que esta aplicación de la Regla de L'Hôpital no es la más popular, como seguramente ya lo sabe, la aplicación más popular es en el cálculo de límites.

Ejemplo 6 *Calcule, si existe, el siguiente límite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(\sqrt{2}x\right)}{x}.$$

Solución. Sean $f, g : (-1,1)$ las funciones dadas por $f(x) = 1-\cos\left(\sqrt{2}x\right)$ y $g(x) = \sqrt{2}x$. Note que f y g son continuas y derivables en $(-1,1)$ y que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$.

Por otro lado, $f'(x) = \sqrt{2}\,\text{sen}(\sqrt{2}x)$ y $g'(x) = \sqrt{2}$, por lo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\,\text{sen}\left(\sqrt{2}x\right)}{\sqrt{2}} = \lim_{x\to 0}\text{sen}\left(\sqrt{2}x\right) = 0.$$

Así, por la Regla de L'Hôpital, se tiene que $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe y

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = 0,$$

es decir,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(\sqrt{2}x\right)}{\sqrt{2}x} = 0.$$

Se sigue que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\left(\sqrt{2}x\right)}{x}$ existe y

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(\sqrt{2}x\right)}{x} = 0.$$

■