Última actualización: 13 de septiembre de 2021

Clase 34

Comenzamos este capítulo con la definición de *función inversa.*

Función Inversa

Definición 1 *Sean $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es una función inyectiva en B si para cualesquiera $x, y \in B$ tales que $x \neq y$ se tiene que $f(x) \neq f(y)$. Si f es inyectiva en A simplemente diremos que f es inyectiva.*

Ejemplo 2 *Considere la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - x$. Muestre que f no es inyectiva en $\mathbb{R}$, pero que sí es inyectiva en $[1/\sqrt{3}, \infty)$.*

Solución. Para ver que f no es inyectiva en $\mathbb{R}$ debemos exhibir dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$, distintos, de manera que $f(x) = f(y)$. Consideremos a -1 y -1. Claramente $-1 \neq 1$ y

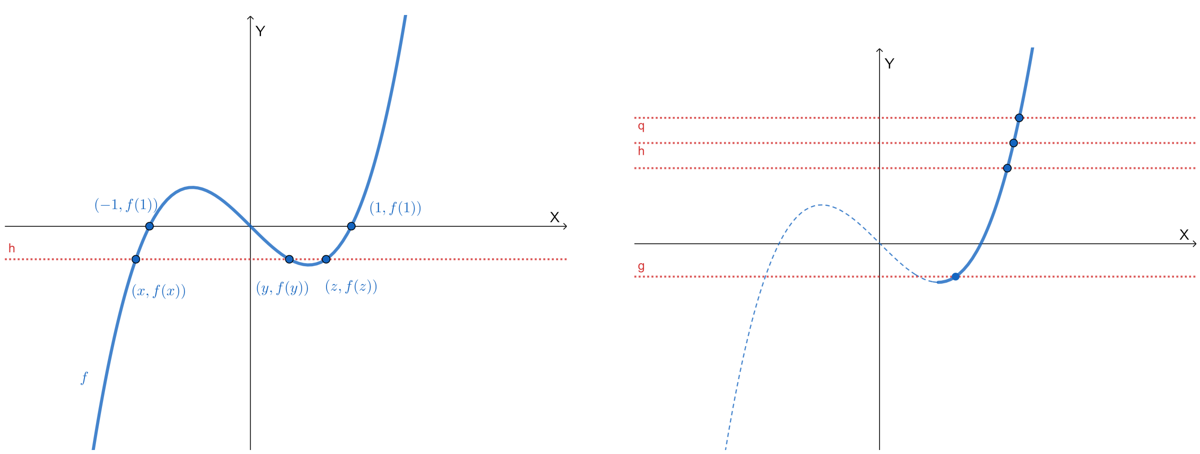
$$f(-1) = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0 = 1 - 1 = (1)^3 - (1) = f(1).$$

Por lo que f no es inyectiva en $\mathbb{R}$.

Ahora, para ver que f es inyectiva en $[1/\sqrt{3}, \infty)$ procederemos por contrapuesta, es decir, supondremos que $x, y \in [1/\sqrt{3}, \infty)$ son tales que $f(x) = f(y)$ y mostraremos que $x = y$.

Como $f(x) = f(y)$, se tiene que $x^3 - x = y^3 - y$, de donde $x^3 - y^3 - x + y = 0$. Así, tenemos que $(x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x - y) = 0$ y de aquí que $(x - y)\left(x^2 + xy + y^2 - 1\right) = 0$.

Pero, note que si $x > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ o $y > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, entonces $x^2 + xy + y^2 + 1 > 1$. Así, en este caso, $x - y = 0$, es decir $x = y$. Y si no ocurre que $x > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ o $y > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, se tiene que $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = y$. De ambos casos casos podemos concluir que f es inyectiva en $[1/\sqrt{3}, \infty)$, vea figura 1 ■



(a) (b)

Figura 1: 1a La función f asigna el mismo valor a -1 y 1, de hecho esta situación ocurre con más parejas de elementos distintos. Podemos observar este hecho, gráficamente, si al trazar una recta horizontal esta corta más de una vez la gráfica de f. 1b Al restringir el dominio de f cualquier recta horizontal corta una sola vez a la gráfica de f, esto significa que f es inyectiva en $[1/\sqrt{3}, \infty)$.

Observación 3 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es creciente o decreciente en A, entonces f es inyectiva, pero el "regreso" no vale, es decir, una función inyectiva no tiene porque ser creciente o decreciente, vea la figura 2.*

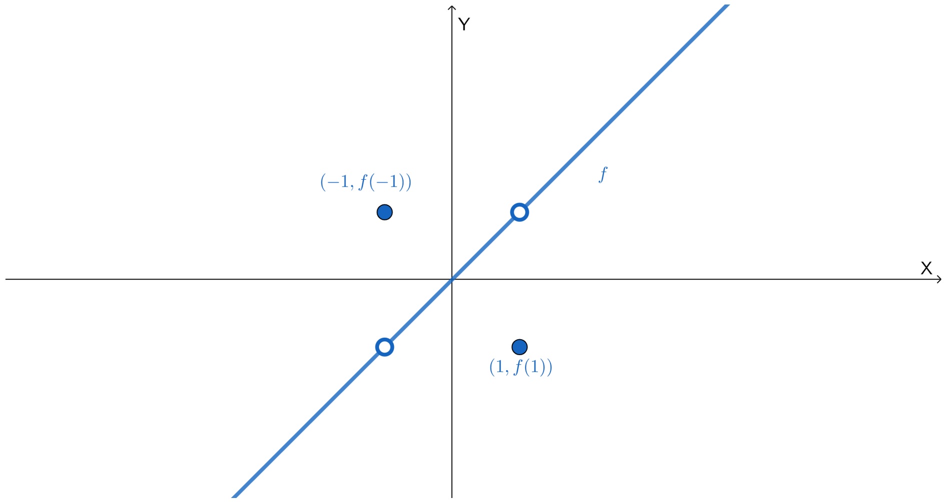


Figura 2: Considere la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$, si $x \neq 1, -1$ y $f(-1) = 1$ mientras que $f(1) = -1$. Note que f es inyectiva, pero no es ni creciente ni decreciente.

Definición 4 *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva. Definimos la función inversa de f, denotada por f^{-1}, como la función $f^{-1} : f(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple que $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ y que $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ para todo $y \in f(A)$.*

Observación 5 *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva. Entonces $f^{-1} : f(a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es también inyectiva.*

Observación 6 *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva. Si f es creciente (decreciente), entonces f^{-1} es creciente (decreciente).*

Teorema 7 *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva en I. Entonces f es creciente o decreciente en I.*

Demostración. Sean $x_1, x_2, x_3 \in I$ con $x_1 < x_2 < x_3$. Como f es inyectiva y $x_1 < x_3$, entonces $f(x_1) \neq f(x_3)$. Supongamos primero que $f(x_1) < f(x_3)$. Afirmamos, en este caso, que $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$. Si no fuese así, por ser f inyectiva, $f(x_1) > f(x_2)$ o $f(x_2) > f(x_3)$. Si $f(x_1) > f(x_2)$, por el Teorema del Valor Intermedio, existe $x \in [x_2, x_3]$ tal que $f(x) = f(x_1)$, lo que contradice la inyectividad de f. Por lo tanto $f(x_1) < f(x_2)$. De manera similar se descarta que $f(x_2) > f(x_3)$. Así, si $f(x_1) < f(x_3)$, entonces $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$. De manera *simétrica* se demuestra que si $f(x_1) > f(x_3)$, entonces $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$. En resumen, si $x_1 < x_2 < x_3$ son tres puntos de I, entonces

$$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) \tag{1}$$

o

$$f(x_1) > f(x_2) > f(x_3). \tag{2}$$

Consideremos ahora cuatro puntos $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$ tales que $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Se tiene entonces que $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ o $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$. Si $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$, en particular $f(x_2) < f(x_3)$, así que, por (1), $f(x_2) < f(x_3) < f(x_4)$. Por otro lado, si $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$, en particular sucede que $f(x_2) > f(x_3)$, luego, por (2), se tiene que $f(x_2) > f(x_3) > f(x_4)$. Lo anterior muestra que si existen $x, y \in I$, con $x < y$, y $f(x) < f(y)$, entonces f es creciente, y si $f(x) > f(y)$ entonces f es decreciente. ■

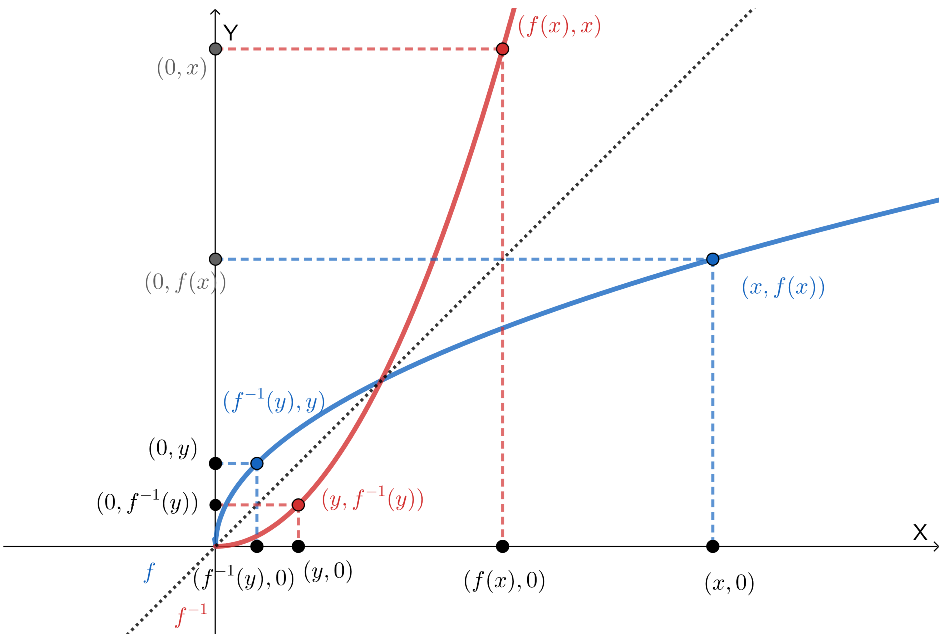


Figura 3: Dada una función inyectiva f, es posible obtener la gráfica de f^{-1} reflejando la gráfica de f respecto a la gráfica de la Identidad.

El siguiente resultado es un ejercicio de continuidad, razón por la cual no incluiremos la demostración.

Lema 8 *Sean* $\subseteq \mathbb{R}$ *un intervalo y* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función. Si* f *es continua y creciente (decreciente) en* I*, entonces el dominio de* f^{-1} *es también un intervalo.*

Teorema 9 *Sean* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervalo y* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua e inyectiva en* I*. Entonces* $f^{-1} : f(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua en* $f(I)$*.*

Demostración. Por el Teorema 7, tenemos que f es creciente o decreciente en I. Supongamos que f es creciente en I y sea $z \in f(I)$. Demostraremos que

$$\lim_{y \to z} f^{-1}(y) = f^{-1}(z).$$

Sea $\varepsilon > 0$. Debemos demostrar que existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $y \in f(I)$ que cumpla que $|y - z| < \delta$ se tiene que $|f^{-1}(y) - f^{-1}(z)| < \varepsilon$. Ahora, como $z \in f(I)$ existe $a \in I$ tal que $f(a) = z$, además para cada $y \in f(I)$ existe $x \in I$ de tal manera que $y = f(x)$. De esta manera, debemos demostrar que existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in I$ que cumpla que $|f(x) - f(a)| < \delta$ se tiene que $|x - a| < \varepsilon$. Como $a - \varepsilon < a < a + \varepsilon$ y f es creciente, se tiene que

$$f(a - \varepsilon) < f(a) < f(a + \varepsilon).$$

Sea $\delta = \text{mín}\{f(a+\varepsilon) - f(a), f(a) - f(a-\varepsilon)\}$. Así, si $|f(x) - f(a)| < \delta$, entonces $f(a) - \delta < f(x) < f(a) + \delta$, de donde

$$f(a - \varepsilon) < f(x) < f(a + \varepsilon).$$

Luego, por ser f creciente, se tiene que f^{-1} es creciente, de donde

$$f^{-1}\left(f(a-\varepsilon)\right) < f^{-1}\left(f(x)\right) < f^{-1}\left(f(a+\varepsilon)\right),$$

es decir,

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

Esto muestra que $\lim\limits_{y \to z} f^{-1}(y) = f^{-1}(z)$. $\blacksquare$