Recordemos el siguiente resultado visto en la sesión anterior:

**Teorema 1** *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva en $I$. Entonces $f^{-1} : f(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $f(I)$.*

# Clase 35

La sesión anterior estudiamos algunas propiedades que "hereda" $f^{-1}$ de la función $f$, como la continuidad. En esta ocasión estudiaremos cuándo $f^{-1}$ es derivable.

## Teorema de la Función Inversa

Si suponemos que $f^{-1}$ es derivable en un punto $c$ y que $f$ es derivable en $f^{-1}(c)$, como $f \circ f^{-1} = Id$, por la regla de la cadena, tendríamos que

$$f'\left(f^{-1}(c)\right)\left(f^{-1}\right)'(c) = 1. \tag{1}$$

Luego, si $f'\left(f^{-1}(c)\right) \neq 0$, entonces

$$\left(f^{-1}\right)'(c) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(c)\right)}.$$

Por supuesto que todo el procedimiento anterior fue suponiendo que $f^{-1}$ es derivable en $c$, así que no hemos dicho cuándo $f^{-1}$ es una función derivable. Y aunque no hemos logrado lo deseado, lo anterior, en particular (1), nos ayuda a deducir el siguiente resultado.

**Teorema 2** *Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva en $(a,b)$. Si $f$ es derivable en $f^{-1}(c)$ y $f'\left(f^{-1}(c)\right) = 0$, entonces $f^{-1}$ no es derivable en $c$.*

**Demostración.** Supongamos que $f^{-1}$ es derivable en $c$. Como $f \circ f^{-1} = Id$, se sigue que

$$f'\left(f^{-1}(c)\right)\left(f^{-1}\right)'(c) = 1.$$

Ahora, dado que $f'\left(f^{-1}(c)\right) = 0$, se tiene que $0 = 1$, lo cual es un absurdo, así que $f^{-1}$ no es derivable en $c$. ■

**Ejemplo 3** *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^3$. Indique si $f$ es inyectiva y en caso afirmativo indique si $f^{-1}$ es derivable en $0$.*

**Solución.** Note que $f$ es derivable y que $f'(x) = 3x^2$. Así, $f'(x) > 0$ si y solo si $x \neq 0$. Se sigue que $f$ es creciente en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Luego, como $f(x) > 0$ si y sólo si $x > 0$; $f(x) < 0$ si y sólo si $x < 0$ y $f(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$, se tiene que $f$ es creciente en $\mathbb{R}$. Luego, $f$ es inyectiva y por lo tanto existe $f^{-1}$. Note además que $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f^{-1}(0) = 0$. Ahora, como $f$ es derivable en $0 = f^{-1}(0)$ y $f'(0) = 3(0)^2 = 0$, por el teorema anterior, $f^{-1}$ no es derivable en 0. ■

Veamos, ahora sí, cuándo $f^{-1}$ es una función derivable.

**Teorema 4 (Teorema de la Función Inversa)** *Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva en $(a,b)$. Si $f$ es derivable en $f^{-1}(c) \in (a,b)$ y $f'\left(f^{-1}(c)\right) \neq 0$, entonces $f^{-1}$ es derivable en $c$ y*

$$\left(f^{-1}\right)'(c) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(c)\right)}.$$

**Demostración.** Sea $d = f^{-1}(c)$. Entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(c+h) - f^{-1}(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(c+h) - d}{h}.$$

Ahora, como $f$ es inyectiva, para cada número $h$ tal que $c + h \in f(a, b)$ existe un único número $k_h$ de tal manera que $c + h = f(d + k_h)$. Por lo tanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(c+h) - d}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}\left(f(d+k_h)\right) - d}{f(d+k_h) - c} = \lim_{h\to 0} \frac{k_h}{f(d+k_h) - f(d)}.$$

Por otro lado, como $c + h = f(d + k_h)$, se sigue que $f^{-1}(c + h) = d + k_h$ y de aquí que $k_h = f^{-1}(c + h) - d$. Luego, como $d = f^{-1}(c)$, se tiene que

$$k_h = f^{-1}(c+h) - f^{-1}(c). \tag{2}$$

Como $f$ es continua en $(a, b)$, por el Teorema 1, $f^{-1}$ es continua en $f(a, b)$. En particular $f^{-1}$ es continua en $c$, así que, por (2), $k_h$ tiende a 0 cuando $h$ tiende a 0. Por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(d+k_h) - f(d)}{k_h} = f'(d) = f'\left(f^{-1}(c)\right).$$

Finalmente, como $f'\left(f^{-1}(c)\right) \neq 0$, se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{k_h}{f(d+k_h) - f(d)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(c)\right)},$$

es decir, $f^{-1}$ es derivable en $c$ y

$$\left(f^{-1}\right)'(c) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(c)\right)}.$$

■

**Ejemplo 5** *Sean $n \in \mathbb{N}$ un número impar, $n > 1$, y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$. Muestre que $g$ es derivable en $c$, para todo $c \neq 0$, y halle $g'(c)$.*

**Solución.** Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^n$. Note que $f$ es una función inyectiva y derivable en todo $\mathbb{R}$, además $f'(x) = nx^{n-1}$. Por ser $f$ una función inyectiva existe su función inversa, de hecho, $g = f^{-1}$. Ahora, $f'(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ y como $f^{-1}(c) = 0$ si y solo si $g(c) = 0$ y esto ocurre si y sólo si $c = 0$, por el Teorema 4, se tiene que $g$ es derivable en cada $c \neq 0$ y

$$\begin{aligned}
g'(c) &= \left(f^{-1}\right)'(c) \\
&= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(c)\right)} \\
&= \frac{1}{f'\left(c^{\frac{1}{n}}\right)} \\
&= \frac{1}{n\left(c^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{c^{\left(1-\frac{1}{n}\right)}} \\
&= \frac{1}{n} c^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}.
\end{aligned}$$

■

De manera similar se demuestra que, si $n \in \mathbb{N}$ es par y $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función dada por $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$, entonces $g$ es derivable en cualquier $c \neq 0$ y $g'(c) = \dfrac{1}{n} c^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}$.

Como una consecuencia de esto enunciamos el siguiente ejercicio, que por supuesto es para ustedes.

**Ejercicio 6** *Sean $q \in \mathbb{Q}$ y $f$ la función dada por $f(x) = x^q$. Muestre que $f$ es derivable y que*

$$f'(x) = q x^{q-1}.$$

Es preciso advertirles que las mejores aplicaciones del Teorema 4 serán vistas hasta Cálculo II, razón por la cuál vale la pena memorizar dicho resultado.