Última actualización: 8 de marzo de 2021

Clase 4

En esta ocasión introduciremos el concepto de *valor absoluto* de un número real y algunas propiedades relacionadas a este.

Valor aboluto

Definición 1 *Para cada número mayor o igual que cero a, denotamos por $\sqrt{a}$ al único número mayor o igual que cero cuyo cuadrado es a.*

Sabemos que la expresión $0 \leq a$ se lee *"cero es menor o igual que a"* o bien *"a es mayor o igual que cero"*, pero también se puede leer como *"a es no negativo"*. De manera similar $a \leq 0$ se puede leer como *"a es no positivo"*.

Definición 2 *Sea $a \in \mathbb{R}$. Definimos el valor absoluto de a, denotado por $|a|$, como sigue*

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a \leq 0. \end{cases}$$

Observación 3 *Consideremos $a \in \mathbb{R}$. Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a \geq 0$ y si $a \leq 0$, entonces $-a \geq 0$, de donde $|a| = -a \geq 0$. En cualquier caso, tenemos que $|a| \geq 0$, es decir, el valor absoluto de un número nunca es negativo. ¿Puede ser cero? Si sí, ¿cuándo lo es?*

Ejemplo 4 *Halle el valor absoluto de $\sqrt{3} - \sqrt{7}$.*

Solución. Para hallar $\left|\sqrt{3} - \sqrt{7}\right|$, según la Definición 2, debemos averiguar si $\sqrt{3} - \sqrt{7}$ es mayor o igual a cero o menor o igual que cero. Ahora, se tiene que $\sqrt{3} < \sqrt{7}$ (¿cómo lo demostrarían?), por lo que $\sqrt{3} - \sqrt{7} < 0$, así que nos encontramos en el "segundo caso". Por lo tanto $\left|\sqrt{3} - \sqrt{7}\right| = -\left(\sqrt{3} - \sqrt{7}\right)$, es decir,

$$\left|\sqrt{3} - \sqrt{7}\right| = \sqrt{7} - \sqrt{3}.$$

■

Proposición 5 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \geq 0$. Se tiene que $|a| = b$ si y sólo si $a = b$ o $a = -b$.*

Demostración.

$\Rightarrow$] Supongamos que $|a| = b$. Si $a \geq 0$, entonces $a = |a|$. Luego, por hipótesis, $a = b$. Ahora, si $a \leq 0$, se tiene que $-a = |a|$ y de aquí, usando la hipótesis, que $-a = b$, es decir, $a = -b$. Así, $a = b$ o $a = -b$.

$\Leftarrow$] Supongamos ahora que $a = b$ o $a = -b$. Si $a = b$, entonces $a \geq 0$, pues $b \geq 0$, así $|a| = a$, de donde $|a| = b$. Si $a = -b$, entonces $a \leq 0$, pues $b \geq 0$, de donde $|a| = -a$. Como $a = -b$, entonces $-a = b$ y de aquí que $|a| = b$. ■

Ejemplo 6 *Halle todos los números x tales que $|x - 7| = 12$.*

Solución. Según la Proposción 5, tenemos dos posibilidades, $x - 7 = 12$ o bien $x - 7 = -12$. De aquí que $x = 19$ o $x = -5$. ■

El valor absoluto de un número a se puede interpretar como la "distancia" del número a al 0, por ejemplo, $|5| = 5$ mientras que $|-5| = 5$, es decir la distancia de 5 a 0 es la misma distancia que de -5 a 5. Ahora, una expresión como $|a - b|$ se puede interpretar como la distancia de a a b o bien de b a a. Así, en el ejemplo anterior lo que queríamos era hallar todos los números x cuya distancia al 7 fuera 12.

Teorema 7 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \geq 0$. Se tiene que $|a| \leq b$ si y sólo si $-b \leq a \leq b$.*

Demostración.

$\Rightarrow$] Supongamos que $|a| \leq b$. Si $a \geq 0$, entonces, por definición de valor absoluto y la hipótesis, tenemos que $0 \leq a = |a| \leq b$ y de aquí que $-b \leq 0 \leq a \leq b$. Por lo tanto, $-b \leq a \leq b$. Ahora, si $a \leq 0$, por definición de valor absoluto y la hipótesis, tenemos que $0 \leq -a = |a| \leq b$ y de aquí que $-b \leq a \leq 0 \leq b$. En este caso también ocurre que $-b \leq a \leq b$.

$\Leftarrow$] Supongamos ahora que $-b \leq a \leq b$. Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$, de donde $-b \leq |a| \leq b$. En particular $|a| \leq b$. Si $a \leq 0$, entonces $|a| = -a$ y de aquí que $-b \leq -|a| \leq b$. Multiplicando esta última desigualdad por (-1), tenemos que $b \geq |a| \geq -b$ y de aquí que $|a| \leq b$. En cualquier caso $|a| \leq b$. ■

Ejemplo 8 *Halle todos los números x para los que se cumple que $|x + 4| \leq 5$.*

Solución. Por el Teorema anterior, resolver $|x + 4| \leq 5$ es equivalente a resolver $-5 \leq x + 4 \leq 5$. Pero, sumando -4, tenemos que $-9 \leq x \leq 1$, es decir, los números que satisfacen $|x + 4| \leq 5$ son aquellos que satisfacen $-9 \leq x \leq 1$. Concluimos que los números que pertenecen al intervalo $[-9, 1]$ son los que cumplen la desigualdad $|x + 4| \leq 5$. ■

Note que en el teorema anterior podemos cambiar $\leq$ por $<$ y obtenemos un resultado similar:

$$|a| < b \text{ si y sólo si } -b < a < b.$$

Entonces, si $\delta > 0$, escribir $|x - c| < \delta$ es equivalente a escribir $-\delta < x - c < \delta$ y esto es equivalente a $c - \delta < x < c + \delta$. Así, utilizando la notación de intervalo, tenemos que $|x - c| < \delta$ es equivalente a que x pertenezca al intervalo $(c - \delta, c + \delta)$. ¿Y en términos de "distancia"? Ah, pues lo que estaríamos diciendo es que todos los números x que distan de c menos que δ pertenecen al intervalo $(c - \delta, c + \delta)$. ¿Tuvieron un déjà vu?

Para concluir esta sesión enunciaremos, y demostraremos, una de las desigualdades más importantes en matemáticas.

Teorema 9 (Desigualdad del Triángulo) *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces,*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Demostración. Por definición de valor absoluto tenemos que $|a| = a$ o $|a| = -a$, es decir, sucede que $|a| = a$ o $-|a| = a$. De aquí que

$$-|a| \leq a \leq |a|. \tag{1}$$

De la misma manera ocurre que

$$-|b| \leq b \leq |b|. \tag{2}$$

Ahora, sumando (1) con (2), tenemos que

$$-\left(|a| + |b|\right) \leq a + b \leq \left(|a| + |b|\right).$$

Luego, por el Teorema 7, concluimos que $|a + b| \leq |a| + |b|$. ■