Última actualización: 10 de marzo de 2021

Clase 5

En las sesiones anteriores hemos trabajado con los números reales sin hacer distinción entre ellos. En esta sesión comenzaremos a distinguir las distintas clases de números.

Principio de Inducción Matemática

La primer clase de números que trabajaremos son aquellos que "surgieron" primero en la historia, los que nos sirven para contar:

$$1, 2, 3 \ldots$$

Al conjunto de todos estos números lo denotamos por $\mathbb{N}$ y lo llamamos el conjunto de los números naturales.

Conocemos la "polémica" de considerar al cero como un número natural o no, pero para coincidir con el libro "base" de este curso (Spivak) no consideraremos al cero como número natural.

Note que este conjunto de números, por si mismo, no satisface todos los axiomas de campo mencionados en la primer sesión, por ejemplo, si n es un número natural su inverso aditivo no es número natural. Pero esto no debe hacernos creer que no vale la pena estudiar dicho conjunto de números. Una propiedad muy importante de este conjunto de número es la siguiente:

Principio de inducción matemática. Sea A un conjunto de números naturales ($A \subseteq \mathbb{N}$). Si se cumple que:

(1) $1 \in A$.

(2) Si un número n pertenece a A, también $n + 1$ pertenece a A.

Entonces $A = \mathbb{N}$.

El princio de inducción matemática se puede utilizar para demostrar que una propiedad/afirmación se cumple para cada número natural, de la siguiente manera:

Supongamos que para cada número natural n se tiene una afirmación $P(n)$ y que además podemos comprobar que:

(a) $P(1)$ es verdadera.

(b) Si $P(n)$ es verdadera, entonces $P(n + 1)$ es verdadera.

Ahora, definimos el conjunto A como el conjunto de números naturales n para los que $P(n)$ es verdadera, es decir,

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ verdadera}\}.$$

Por el inciso (a), tenemos que $1 \in A$; luego por el inciso (b), tenemos que si n pertenece a A, también $n+1$ pertenece a A. Así, por el principio de inducción matemática, $A = \mathbb{N}$. Es decir, $P(n)$ es verdadera para todo número natural n.

Es muy común identificar el principio de inducción matemática con el efecto domino:

Supongamos que disponemos de una cantidad "infinita" de fichas de domino y las colocamos de manera vertical, una tras otra, en una fila recta. Si:

(a) Tiramos la primera ficha y

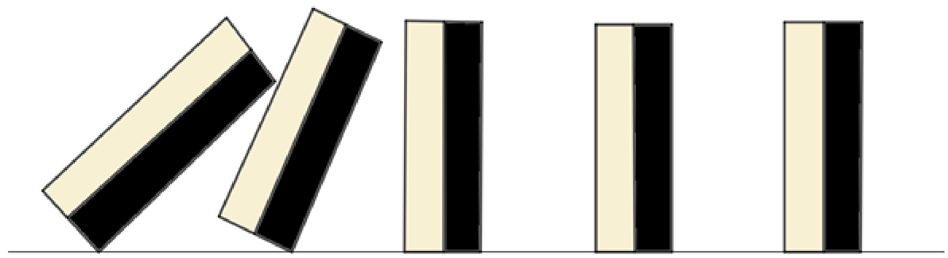

Figura 1: El principio de inducción matemática se puede pensar como el efecto domino.

(b) estamos seguros de que cada que caiga una ficha tirará a la siguiente.

Entonces caerán todas las fichas.

Ejemplo 1 *Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solución. En este ejemplo, ¿quién es $P(n)$? Note que se nos pide demostrar que la suma de los primeros n números naturales es igual a la mitad del producto del n-ésimo número natural con el $(n+1)$-ésimo número natural. Así, tenemos que:

$P(1)$:La suma del primer número natural es igual a la mitad del producto de 1 con 2

$P(2)$:La suma de los dos primeros números naturales es igual a la mitad del producto de 2 con 3

$\vdots$

$P(n)$:La suma de los primeros n números naturales es igual a la mitad del producto de n con $n+1$

$\vdots$

Una vez identificada la afirmación procedemos con la inducción matemática. Primero debemos demostrar que $P(1)$ es verdadera, es decir, que 1 es igual a

$$\frac{1(2)}{2},$$

lo cual es claramente cierto.

Hemos comprobado el inciso (a) (a este paso se le llama *la base de inducción*). Ahora, antes de proceder a verificar el inciso (b), debemos observar que en dicho inciso se debe suponer $P(n)$ como verdadera (a esto se le llama *la hipótesis de inducción*) y con ello demostrar que $P(n+1)$ es verdadera (a esto se le llama *paso inductivo*).

Supongamos entonces que $P(n)$ es verdadera, es decir, que se cumple que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

y demostremos que $P(n+1)$ es verdarera, es decir, demostremos que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Por (1), tenemos que

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1).$$

Ahora, como

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

se tiene que

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Concluimos, por inducción matemática, que

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

para todo número natural n. ■

Aprovechamos este ejemplo para introducir "la notación sigma":

Si $a_1, a_2, ..., a_n$ son número reales, escribiremos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

en lugar de escribir $a_1+a_2+\cdots+a_n$ (y se lee *la SUMA desde que i es 1 hasta n de a_i*), es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

Así, la afirmación del ejemplo anterior es que

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2},$$

para todo número natural n.