Última actualización: 11 de marzo de 2021

Clase 6

En la sesión anterior estudiamos el principio de inducción matemática, en esta ocasión enunciaremos un par de variantes de este principio, con sus respectivos ejemplos.

Variantes del Principio de Inducción Matemática

En la practica nos encontraremos con afirmaciones, sobre los números naturales, que son verdaderas a partir de cierto número natural n_0. Para demostrar que una afirmación vale para todo número natural mayor o igual que n_0 debemos considerar la siguiente “modificación” del principio de inducción matemática:

Si para cada numero natural mayor o igual que n_0 se tiene una afirmación $P(n)$ y se sabe que:

(a) $P(n_0)$ es verdadera.

(b) Si $P(n)$ es verdadera, entonces $P(n+1)$ tambien es verdadera.

Entonces concluimos que $P(n)$ es verdadera para todo número natural $n \geq n_0$.

Ejemplo 1 *Demuestre que para cada número natural* $n \geq 4$, *se cumple que*

$$n + 7 < n^2.$$

Demostración. Note que la afirmación es para todo número natural $n \geq 4$, así que nuestra base de inducción es con $n = 4$. Es decir, debemos verificar que

$$4 + 7 < 4^2,$$

pero $11 < 16$, así que la afirmación se cumple para $n = 4$.

Supongamos ahora que $n + 7 < n^2$ para un número natural $n \geq 4$ y mostremos que

$$(n+1) + 7 < (n+1)^2.$$

Por hipótesis de inducción, tenemos que

$$(n+1) + 7 = (n+7) + 1 < n^2 + 1. \tag{1}$$

Ahora, como $0 < 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, en particular si $n \geq 4$, entonces

$$n^2 + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2. \tag{2}$$

Se sigue, de (1) y (2), que

$$(n+1) + 7 < (n+1)^2.$$

Así, por el principio de inducción matemática, $n + 7 < n^2$ para todo número natural $n \geq 4$. ■

Es muy común pensar que la inducción matemática solo se usa para demostrar “fórmulas”, pero en el ejemplo anterior vimos que se puede usar para demostrar otro tipo de afirmaciones.

Imaginemos que para cada número natural n queremos definir un “objeto matemático” a_n. Es seguro que podemos definir explícitamente los primeros “objetos”, pero mediante este proceso (uno por uno) nunca acabaríamos. La inducción matemática nos permite dar definiciones precisas sin definir “objeto” por “objeto”.

Definición 2 *Sea $a \in \mathbb{R}$. Definimos, para cada número natural n, la n-ésima potencia de a, denotada por a^n, como sigue:*

(a) $a^1 = a$

(b) $a^{n+1} = a^n \cdot a$, *para cada* $n \geq 2$.

Note que en el inciso (a) tenemos nuestra "base de inducción", mientras que en el inciso (b) se supone a^n definida y se usa para definir a^{n+1}, he aquí la inducción matemática. Este tipo de definiciones son llamadas definiciones recursivas o definiciones inductivas.

Otra variante del principio de inducción matemática es la llamada **inducción fuerte**:

Supongamos que para cada número natural n se tiene una afirmación $P(n)$ y que además podemos comprobar que:

(a) $P(1)$ es verdadera.

(b) Si $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ son verdaderas, entonces $P(n+1)$ es verdadera.

Entonces se concluye que $P(n)$ es verdadera para todo número natural n.

Note que la diferencia entre la inducción matemática y la inducción fuerte es que en esta última, en el inciso (b), se suponen verdareras desde $P(1)$ hasta $P(n)$ para demostrar que $P(n+1)$ es verdadera. Esto podría hacernos pensar que son distintas, pero de hecho son equivalentes.

Definición 3 *Definimos los números de Fibonacci, $F_1, F_2, F_3, \ldots$, como sigue:*

(a) $F_1 = F_2 = 1$,

(b) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, *para cada número natural* $n \geq 3$.

Ejemplo 4 *Demuestre que para cada número natural n se tiene que*

$$F_n < 2^n.$$

Solución. Note que

$$F_1 = 1 < 2 = 2^1 \qquad \text{y} \qquad F_2 = 1 < 4 = 2^2.$$

Con lo que verificamos nuestra base de inducción (¿por qué verificamos con n=1 y n=2?).

Supongamos ahora que para el número natural n se tiene que

$$F_k < 2^k, \tag{3}$$

para todo $k \leq n$ y demostremos que

$$F_{n+1} < 2^{n+1}.$$

Usando la definición de los números de Fibonacci y (3), tenemos que

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} < 2^n + 2^{n-1}. \tag{4}$$

Luego,

$$2^n + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} + 2^{n-1} = (2+1)2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} < 4 \cdot 2^{n-1} = 2^2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}. \tag{5}$$

Así, de (4) y (5), se tiene que

$$F_{n+1} < 2^{n+1}.$$

Por lo tanto, por el principio de inducción matemática fuerte, se tiene que

$$F_n < 2^n,$$

para todo número natural n. ■