Última actualización: 12 de marzo de 2021

Clase 7

Las dos sesiones anteriores las dedicamos a estudiar los números naturales, de hecho, inducción matemática. En esta sesión estudiaremos otras clases de números.

Enteros, Racionales e Irracionales

Como ya hemos dicho antes, los números naturales, entre otras cosas, nos sirven para contar, por ejemplo, la cantidad de cosas que uno posee, pero si, por desgracia, uno no posee nada, ¿como representar este hecho? Peor aún, si debemos cierta cantidad de cosas ¿cómo representar esto? Seguramente la necesidad humana de representar cosas como estas influyeron para introducir otro tipo de números, los enteros. A este conjunto de números, que denotamos por $\mathbb{Z}$, pertenecen todos los números naturales, pero además el cero es un elemento de $\mathbb{Z}$ y todos los inversos aditivos de los naturales, es decir,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Note que este conjunto de números satisface todos los axiomas de campo referentes a la suma, en particular se satisface el axioma del neutro aditivo y el inverso aditivo, algo que con $\mathbb{N}$ no ocurría. La pregunta ahora es ¿$\mathbb{Z}$ satisface los axiomas de campo correspondientes al producto? La respuesta es no, por ejemplo, dado $z \in \mathbb{Z}$, el inverso multiplicativo de z no es un entero. Así, $\mathbb{Z}$ no es un campo.

Continuando con la idea de las necesidades humanas y los números, ¿cómo representar la mitad de algo? Posiblemente esta sea una de las razones para introducir los números racionales, que denotamos por $\mathbb{Q}$. Esta clase de números esta formada por cocientes de enteros con naturales, es decir,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z} \text{ y } q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Resulta que $\mathbb{Q}$ satisface todos los axiomas de campo y más aún, satisface los axiomas de orden, entonces la pregunta natural es ¿el conjunto de números naturales es igual al conjunto de los números reales? La respuesta es no. Y aunque no tenemos la herramienta sufuciente para demostrar que existen números reales que no son racionales (recuerden que nos falta enunciar un axioma), si podemos demostrar, por ejemplo, que $\sqrt{2}$, suponiendo que existe, no es un número racional.

Pero antes una definición y unos resultados.

Definición 1 *Sea $z \in \mathbb{Z}$. Diremos que z es:*

(1) Un número par si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = 2k$.

(2) Un número impar si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = 2k + 1$.

El siguiente ejercicio es parte de su Tarea 01.

Ejercicio 2 *Demuestre que todo número natural es par o impar.*

Proposición 3 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) Si n es par, entonces n^2 es par.

(2) Si n es impar, entonces n^2 es impar.

Demostración.

(1) Por hipótesis tenemos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$. Así,

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

y como $2k^2 \in \mathbb{Z}$, concluimos que n^2 es par.

(2) En este inciso tenemos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$. Por lo tanto,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

y como $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$, se tiene que n^2 es impar.

$\blacksquare$

Corolario 4 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) Si n^2 es par, entonces n es par.

(2) Si n^2 es impar, entonces n es impar.

Demostración. Basta leer la contrapositiva de cada inciso, usar el Ejercicio 2 y los incisos (b) y (a), en ese orden, de la proposición anterior (recuerden que si tenemos una afirmación del tipo $p \Rightarrow q$, la contrapositiva de esta afirmación es $\neg q \Rightarrow \neg p$ y además esta es equivalente). $\blacksquare$

Proposición 5 *$\sqrt{2}$ no es un número racional.*

Demostración. Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional, es decir, que existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}. \tag{1}$$

Podemos suponer además que p y q son primos relativos, es decir, que no tienen divisores en común (si no fuera así, “simplificamos”). Se sigue, de (1), que

$$p^2 = 2q^2, \tag{2}$$

es decir, p^2 es par. Luego, por el Corolario 4, p es par, esto es, $p = 2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Así,

$$p^2 = 4k^2. \tag{3}$$

De (2) y (3), se sigue que

$$q^2 = 2k^2,$$

es decir q^2 es par. Luego, por el Corolario 4, q es par. Tenemos entonces que p y q son pares, así que el dos es un divisor común, lo que contradice el hecho de que p y q no tienen divisores en común. Por lo tanto $\sqrt{2}$ no es racional. $\blacksquare$

Los números que no son racionales los llamamos irracionales, es decir, el conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es el conjunto de los números irracionales. En resumen, tenemos que

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$