Última actualización: 27 de mayo de 2021

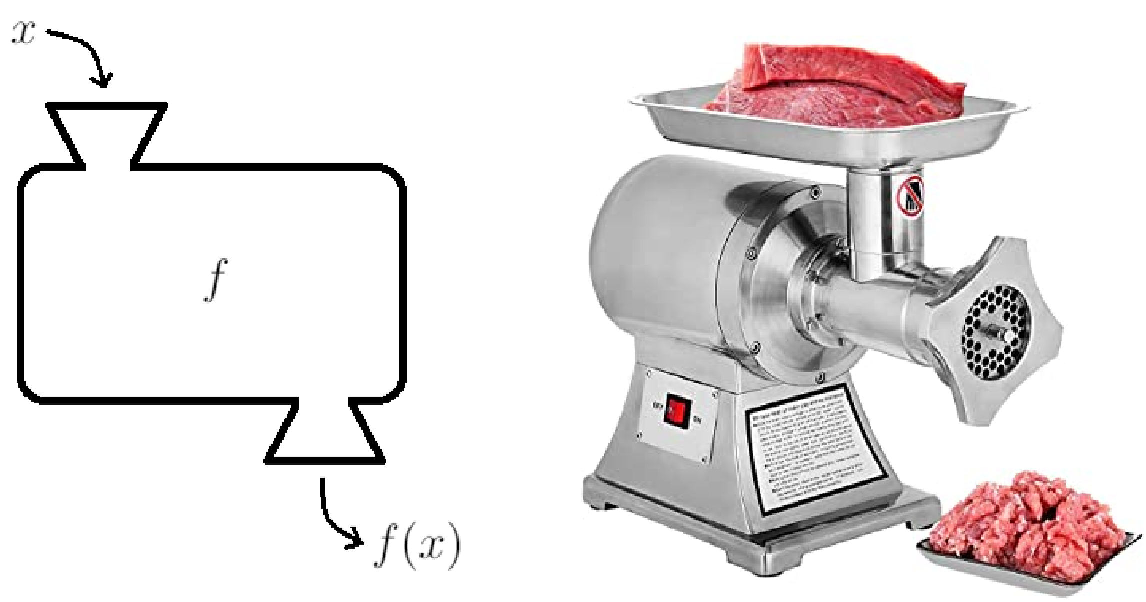
Clase 08

En esta ocasión nos dedicaremos a estudiar un concepto fundamental para este curso, las funciones.

Funciones

Eduardo vive en el Poniente del municipio mexiquense de Ecatepec y viaja todos los días, en transporte público, a Ciudad Universitaria en la CDMX, pues ahí estudia. Si Eduardo sale de su casa a las 4:45 a. m. llega a CU a las 6:30 a. m.; si sale a las 5:00 a. m. llega a las 7:15 a. m. y si sale a las 5:15 a. m. llega a las 8:10 a. m. Es claro que la hora de llegada de Eduardo a CU depende de la hora de salida de su casa (entre otras cosas). Así, por medio de su experiencia, puede "calcular" la hora de llegada según la hora de salida, sin importar cuál sea esta. De alguna manera Eduardo está asignado a un número (la hora de salida) otro número (la hora de llegada). Esto es un ejemplo de una función en la vida real.

Definición 1 *Sean A, B dos conjuntos. Una **función** de A en B es una "regla" que a cada elemento de A le asocia un único elemento de B. Al conjunto A se le llama **dominio** y al conjunto B **contradominio**.*



(a) (b)

Figura 1: 1a Una función se puede pensar como una máquina donde uno ingresa números y la máquina nos devuelve uno y solo uno por cada número ingresado. 1b Y ya que estamos hablando de máquinas, si pensamos en una máquina para moler carne, es claro que en ella no podemos ingresar pedazos de metal, entonces pensando una función como una máquina de moler carne, es claro que el dominio de la función es el conjunto de todos los números que si podemos ingresar a la máquina y el contradominio es la charola donde cae la carne ya molida, pero note que esta charola puede no llenarse.

En este curso solo consideraremos subconjuntos de los números reales como dominios y como contradominio al conjunto de los números reales, es decir $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{R}$ (éste tipo de funciones son llamadas **funciones reales de una variable real**).

Ejemplo 2 *Los siguientes son ejemplos de funciones reales de una variable real:*

(1) La "regla" que asigna a cada número del conjunto $\{-1, 0, 1\}$ *su cuadrado.*

(2) La "regla" que asigna a cada número real el número 27 *(note que esta función le asigna el mismo número a cualquier número real, razón por la cual este tipo de funciones son llamadas constantes).*

(3) La "regla" que asigna a cada número y *del conjunto* $\mathbb{R}$ *el mismo número, es decir* y *(esta función es llamada la función identidad en* $\mathbb{R}$*).*

(4) La "regla" que asigna a cada número x*, que satisface* $-4 \leq x < 5$*, el número* $x^2 - 1$*.*

(5) La "regla" que asigna a cada número x *el número* $x^2 - 1$*.*

(6) La "regla" que asigna a cada número $c \neq 1, -1$ *el número* $\dfrac{c^3 + 3c + 5}{c^2 - 1}$*.*

Denotamos con letras minúsculas, como f, g, h, etc., a las funciones. Si f es una función y x es un elemento de su dominio denotamos por $f(x)$ al número que la función f asigna a x y le llamamos la **imagen**, bajo la función f, de x.

Escribiremos $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ para indicar que f es una función que tiene como dominio el conjunto A y cuyo contradominio es $\mathbb{R}$.

Ejemplo 3 *Con la notación introducida podemos escribir las funciones del Ejemplo 2 como sigue:*

(1) $f : \{-1, 0, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$*, la función dada por* $f(x) = x^2$*.*

(2) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, la función dada por* $g(x) = 27$*.*

(3) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *la función dada por* $h(y) = y$*.*

(4) $j : [-4, 5) \longrightarrow \mathbb{R}$*, la función dada por* $j(x) = x^2 - 1$*.*

(5) $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, la función dada por* $k(x) = x^2 - 1$*.*

(6) $l : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *la función dada por* $l(c) = \dfrac{c^3 + 3c + 5}{c^2 - 1}$*.*

Note que bajo esta notación la "regla" que asigna a cada elemento del dominio un único elemento de $\mathbb{R}$ usualmente es escrita en términos de una igualdad y a esta igualdad la llamamos **regla de correspondencia** de la función. Por ejemplo, en el inciso (1) del Ejemplo 2, la oración *la "regla" que asigna a cada número su cuadrado* es sustituida, en el inciso (1) del Ejemplo 3, por la igualdad $f(x) = x^2$, es decir, $f(x) = x^2$ es la regla de correspondencia de f.

Definición 4 *Dos* ***funciones son iguales*** *si tienen el mismo dominio, el mismo contradominio y la misma regla de correspondencia.*

Ejemplo 5 *Note que aunque las funciones* j *y* k*, del Ejemplo 3, tienen la misma regla de correspondencia no tienen el mismo dominio por lo que son funciones distintas.*

En ocasiones se define una función únicamente usando la regla de correspondencia. En estos casos debemos asumir que el dominio de la función es el conjunto de números más grande donde la regla de correspondencia tiene "sentido". Por ejemplo, si consideramos la función f dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$, debemos considerar el conjunto más grande de números x para los que la expresión $\dfrac{1}{x}$ tiene sentido, es decir, el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

En general, si f es una función dada en términos de su regla de correspondencia denotaremos por $Dom(f)$ al mayor conjunto de números donde dicha regla de correspondencia tiene sentido y lo llamaremos el dominio natural de f.

Definición 6 *Sean $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, con $B \neq \varnothing$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Definimos el conjunto de imágenes, bajo f, de los elementos del conjunto B, denotado por $f(B)$, como*

$$f(B) = \{f(b) \mid b \in B\}$$

y lo llamamos ***la imagen de** B **bajo** f. Si $B = A$, al conjunto $f(A)$ lo llamamos* ***la imagen o rango de** f.*

Ejemplo 7 *Consideremos la función $j : [-4, 5) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $j(x) = x^2 - 1$. Halle la imagen de j.*

Solución. Sea $x \in [-4, 5)$. Se tiene que $-4 \leq x < 5$, de donde $0 \leq x^2 < 25$ (¿Cómo justificaría esto?). Y de aquí que $-1 \leq x^2 - 1 < 24$, es decir, $-1 \leq j(x) < 24$. Lo anterior muestra que $j\left([-4, 5)\right) \subseteq [-1, 24)$. Por otro lado, si $y \in [-1, 24)$, entonces $0 \leq y + 1 < 25$ y de aquí que $0 \leq \sqrt{y+1} < 5$ (Note que aquí estamos asumiendo la existencia de una raíz cuadrada, pero no hay porque preocuparse, más adelante justificaremos esto). Entonces, el número $\sqrt{y+1}$ es un número en el dominio de j tal que

$$j\left(\sqrt{y+1}\right) = \left(\sqrt{y+1}\right)^2 - 1 = (y+1) - 1 = y.$$

Lo que muestra que $[-1, 24) \subseteq j\left([-4, 5)\right)$. Así, la imágen de j es el intervalo $[-1, 24)$, es decir,

$$j\left([-4, 5)\right) = [-1, 24).$$

■