Última actualización: 28 de mayo de 2021

Clase 09

La sesión anterior estudiamos el concepto de función real de variable real y en esta ocasión estudiaremos las operaciones que con estas podemos realizar.

Operaciones con funciones

Definición 1 (Operaciones con funciones) *Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Definimos las siguientes funciones:*

(1) ***La suma de** f **con** g, denotada por $f + g$, como la función dada por*

$$(f + g) = f(x) + g(x).$$

Note que $Dom(f + g) = A \cap B$.

(2) ***El producto de** f **con** g, denotado por fg, como la función dada por*

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

En este caso se tiene que $Dom(fg) = A \cap B$. Note además que si f es una función constante, digamos $f(x) = c$, entonces tenemos el producto de un número real por una función, es decir, $(cg)(x) = cg(x)$. Una vez dicho esto también podemos definir la diferencia de f con g como $f + (-1)g$, es decir, $f - g = f + (-1)g$.

(3) ***El cociente de** f **entre** g, denotado por $\dfrac{f}{g}$, como la función dada por*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Se tiene que $Dom\left(\dfrac{f}{g}\right) = \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$.

(4) ***La composición de** f **con** g, denotada por $f \circ g$, como la función dada por*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Note que para poder aplicar f al número $g(x)$ es necesario que $g(x)$ pertenezca al dominio de f, por lo que $Dom(f \circ g) = \{x \in B \mid g(x) \in A\}$.

Ejemplo 2 *Considere las funciones f, g y h dadas por las siguientes reglas de correspondencia*

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad y \quad h(x) = \sqrt{x}.$$

Halle los dominios y las reglas de correspondencia de las siguientes funciones:

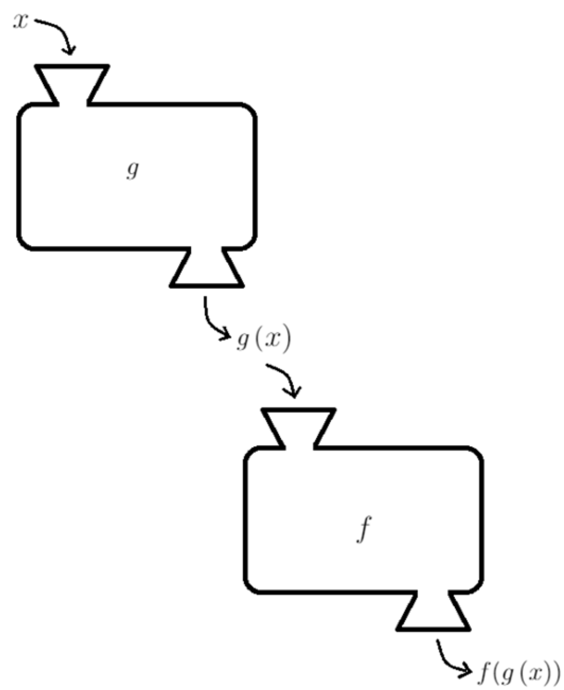

Figura 1: Dado un número x en el dominio de g, para que la expresión $f(g(x))$ tenga sentido es necesario que el número $g(x)$ pertenezca al dominio de f, esto en la metáfora de las máquinas significa que $g(x)$ debe poderse ingresar a la máquina f.

(1) fg, *(2)* $h \circ f$, *(3)* $f \circ h$.

Solución. Primero note que $Dom(f) = \mathbb{R}$, $Dom(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $Dom(h) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Por lo que:

(1) $Dom(fg)(x) = Dom(f) \cap Dom(g) = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Luego,

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x^2)\left(\frac{1}{x}\right) = x.$$

(2) Se tiene que

$$\begin{aligned} Dom(h \circ f) &= \{x \in Dom(f) \mid f(x) \in Dom(h)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\} \\ &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

(3) Aquí, tenemos que

$$\begin{aligned} Dom(f \circ h) &= \{x \in Dom(h) \mid h(x) \in Dom(f)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R}^+ \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(\sqrt{x}) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x.$$

■

Como pudimos observar en el ejercicio anterior, la composición de funciones no es conmutativa, pero las otras operaciones sí se "portan bien". En la siguiente proposición enunciamos algunas propiedades que involucran la suma y el producto de funciones y la demostración la dejamos como ejercicio.

Proposición 3 *Para cualesquiera funciones $f, g, h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se verifica que:*

(1) $(f+g)+h = f+(g+h)$; $(fg)h = f(gh)$,

(2) $f+g = g+f$; $fg = gf$,

(3) $h(f+g) = hf + hg$.

Definición 4 *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Definimos la gráfica de la función f, denotada por $\mathscr{G}_f$, como el siguiente conjunto de pares ordenados de números*

$$\mathscr{G}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}.$$

La gráfica de cualquier función es un conjunto, en particular la gráfica de una función real de una variable real es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto tiene una representación visual en nuestro tan famoso plano cartesiano, vea figura 2.

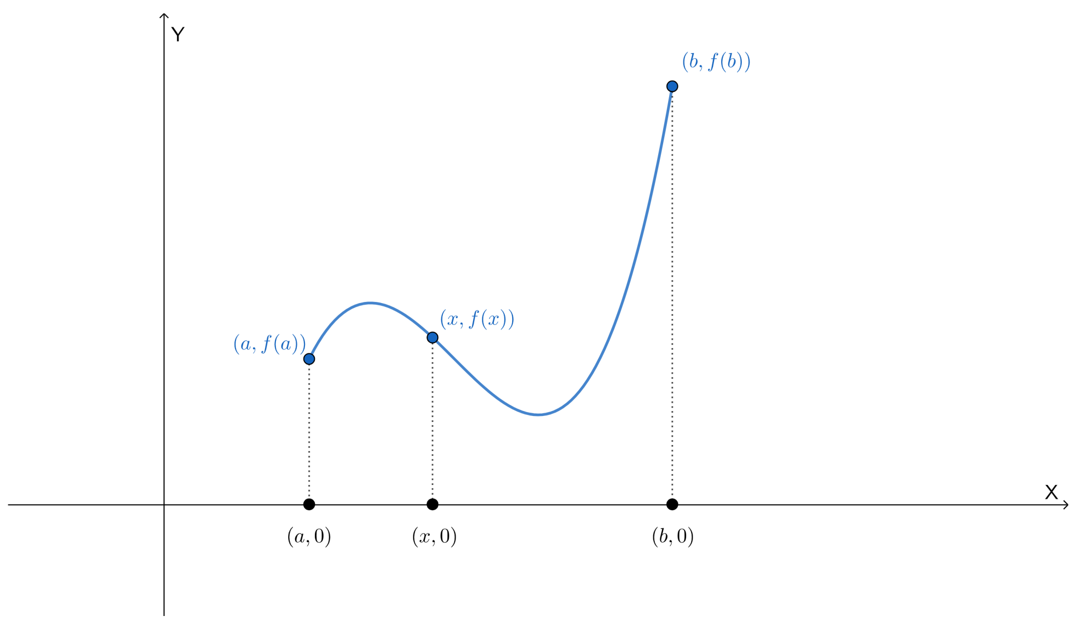

Figura 2: La gráfica de una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto tiene una representación gráfica en el plano cartesiano.

En los siguientes ejemplos ilustramos (aunque sin justificación, pues aún no contamos con las herramientas para ello) algunas "gráficas".

Ejemplo 5 *Los siguientes son ejemplos de funciones reales de variable real y sus respectivas "gráficas".*

(1) ***Las funciones constantes.*** *Dado un número real fijo* $c \in \mathbb{R}$, *podemos considerar la función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = c$.

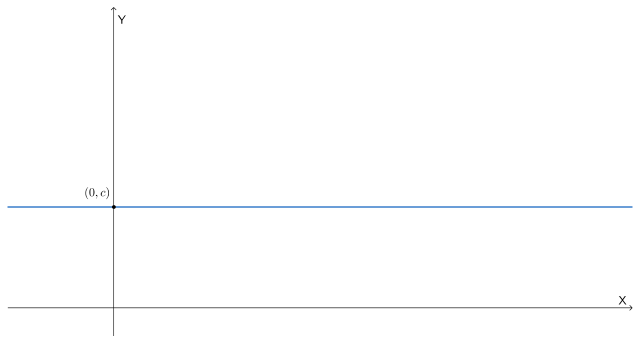

Figura 3: Todos los puntos en la gráfica de una función constante tienen la misma ordenada, $(x, f(x)) = (x, c)$.

(2) ***Las funciones afines.*** *Dados* $c, d \in \mathbb{R}$ *con* $c \neq 0$, *podemos considerar la función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = cx + d$.

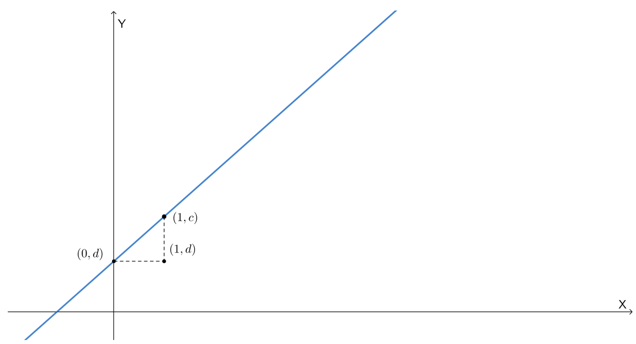

Figura 4: Las gráficas de las funciones afines son rectas en el plano con pendiente c y ordenada al origen d. Si $d = 0$, entonces llamamos a f **función lineal**.

(3) ***Las funciones polinomiales.*** *Dados* $n \in \mathbb{N}$ *y* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, *con* $a_n \neq 0$, *podemos considerar la función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

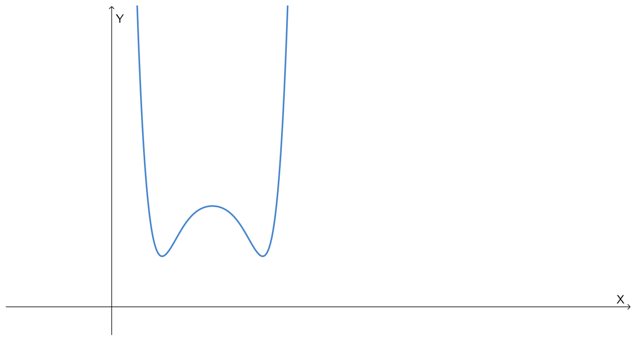

Figura 5: Se muestra la grafica de la función $f(x) = x^6 - 12x^5 + 59x^4 - 152x^3 + 215x^2 - 156x + 46$. El número natural n es llamado “el grado de f”. Una función polinomial de grado n tiene a lo más $n - 1$ “picos” o “valles”.

(4) ***Las funciones racionales.*** *Una función f es racional si $f = \dfrac{p}{q}$, donde p y q son dos funciones polinomiales y q no es la constante cero.*

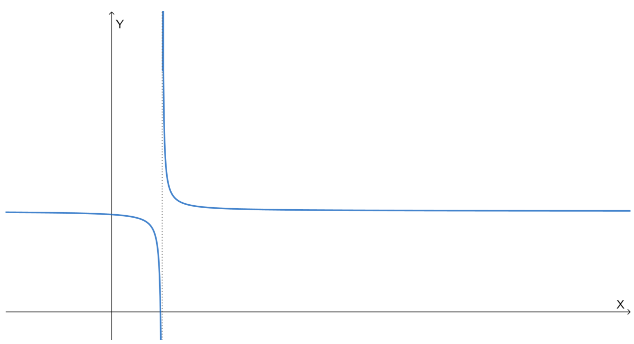

Figura 6: Se muestra la grafica de la función racional f dada por $f(x) = \dfrac{30x - 29}{15x - 15}$.

(5) ***La función de Dirichlet.*** *Es la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

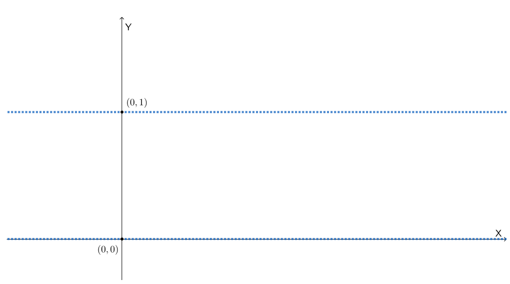

Figura 7: Se muestra la gráfica de la función de Dirichlet.

(6) ***La función parte entera (piso).*** *Dado un número real x, denotamos por $\lfloor x \rfloor$ al mayor entero menor o igual que x, es decir,*

$$\lfloor x \rfloor = \text{máx}\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}.$$

De esta manera podemos definir la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

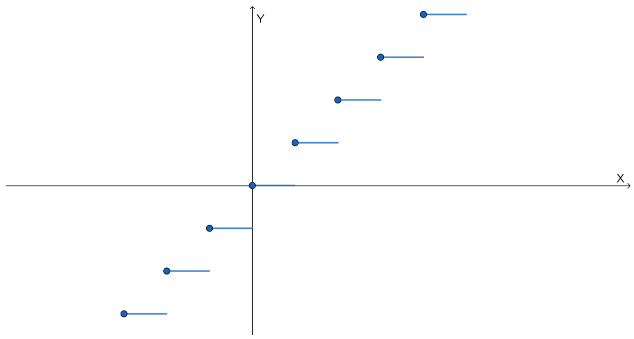

Figura 8: La función parte entera piso a veces es llamada cumpleaños, pues cuando a uno le preguntan su edad siempre responde con un entero, por ejemplo si tengo 19 años con 11 meses solo digo que tengo 19 años.